

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2023-24

Ασκήσεις 2.

1. Έστω (a_{k_n}) υπακολουθία μίας ακολουθίας (a_n) . Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, έπεται απαραίτητα ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει; Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.
2. Να βρεθεί για ποια $x \in \mathbf{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.
3. Άσκηση 16 σημειώσεων ΑΓ.
4. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k a^n}{n!} \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q} \quad (0 < q < p)$$

5. Έστω $0 < a_n < 1$, $n \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-a_n}$ συγκλίνει.
6. Να βρεθούν τα $\alpha \in \mathbf{R}$ για τα οποία συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha}$$

7. Άσκηση 31 σημειώσεων ΑΓ.
8. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) .$$

Υπόδειξη: για τη δεύτερη σειρά χρησιμοποιείστε κατάλληλα το ότι $(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$ προκειμένου να δείξετε ότι $\sqrt[n]{n} - 1 \geq 1/n$.

9. Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Να δειχθεί ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ τότε $na_n \rightarrow 0$.
10. (α) Αποδείξτε ότι το άθροισμα S της συγκλίνουσας σειράς

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \dots$$

είναι θετικός αριθμός. (β) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

συγκλίνει και ότι το άθροισμά της είναι $S/2$. Ποιο είναι το ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει;