Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ακαδ. έτος 2022-23 (εαρινό εξάμηνο)

Ασκήσεις 5.

1. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Αν ισχύει
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,\qquad \text{για κάθε } x\in[a,b],$$
έπεται απαραίτητα ότι $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[a,b]$;

2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση στο και $g:[a,b]\to[a,b]$ παραγωγίσιμη. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης
$$h(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt\,.$$

3. Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ μία διαμέριση του $[a,b]$ και $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Να δειχθεί ότι
$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le\int_a^b|f'(x)|dx$$

4. Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι
$$|f(x)|\le\Big(\int_0^1 f'(t)^2dt\Big)^{1/2}\ ,\qquad \text{για κάθε } x\in[0,1]\,.$$

5. Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\alpha_n=\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ είναι μηδενική.

6. Να βρεθεί για ποια $\alpha\in\mathbf{R}$ υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^{-\alpha}dx$.

7. Να βρεθεί για ποια $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_2^\infty\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\,.$$

8. Να βρεθεί για ποια $\alpha\in\mathbf{R}$ υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_0^\infty\Big(\frac{x}{x^2+1}-\frac{\alpha}{x+2}\Big)dx$$

9. Έστω f και g θετικές συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $[0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι αν το $\lim_{x\to+\infty}f(x)/g(x)$ υπάρχει και είναι θετικός πραγματικός αριθμός, τότε τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^\infty f(x)dx$ και $\int_0^\infty g(x)dx$ ή συγκλίνουν και τα δύο ή αποκλίνουν και τα δύο.

10. Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ γνήσια αύξουσα συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι
$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=xf(x)\ ,\qquad \text{για κάθε } x>0.$$