30/4/2012 $\qquad$ 15º μάθημα

Ομοιόμορφη συνέχεια

1 Ορισμός: Η $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: για κάθε ζευγάρι σημείων $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ ισχύει $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

Βασικό πρόβλημα: Μου δίνουν τη f και θέλω να εξηγήσω αν είναι ομοιόμορφα συνεχής ή όχι.

Χαρακτηρισμός με ακολουθίες: Η f είναι ομ. συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αποτελέσματα:

1. Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής
2. Αν η f είναι Lipschitz συνεχής (δηλ. $\exists M > 0$ ώστε $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in A$) τότε η f είναι ομ. συνεχής (Αποδ. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$).
3. Πώς ελέγχουμε αν μια συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής;

Μια περίπτωση: έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε f Lipschitz $\Leftrightarrow$ f' φραγμένη.

4. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Υπάρχουν ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι Lipschitz. Η $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομ. συνεχής (συνεχής σε κλειστό διάστημα) αλλά η f' δεν είναι φραγμένη $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \to +\infty$ όταν $x \to 0^+$.

Από το (3) δεν είναι Lipschitz συνεχής.

Ορισμός: Η $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται Hölder συνεχής με βαθμό $a>0$ αν $\exists\ M>0: \forall\ x,y \in A$ $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^a$ (*).

πχ. $\frac{1}{2}$-Hölder: $|f(x)-f(y)| \le M\sqrt{x-y}$.

Σημείωση: Κάθε Hölder συνεχής βαθμού $a>0$ είναι ομ. συνεχής

Αποδ

Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{1/a}$

Τότε, αν $|x-y|<\delta$ έχουμε

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y|^a < M\delta^a = M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$

Παράδειγμα: Η $\sqrt{x}$ είναι Hölder με βαθμό $a=\frac{1}{2}$ και σταθερά $M=1$.

Δηλ. αν $x,y \ge 0$ τότε $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}$

$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a,b \ge 0$ (*).

Αν πχ. $x \ge y$ γράφουμε $\sqrt{x} = \sqrt{y+(x-y)} \le \sqrt{y}+\sqrt{x-y}$

$\Rightarrow |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \sqrt{x}-\sqrt{y} \le \sqrt{x-y}$.

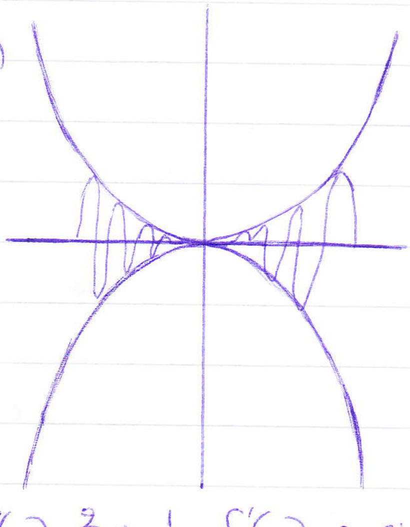
(6) Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση

(α) Είναι πάντα ομοιόμορφα συνεχής;

(β) Αν όχι, υπάρχει χαρακτηρισμός της ομ. συνέχειας;

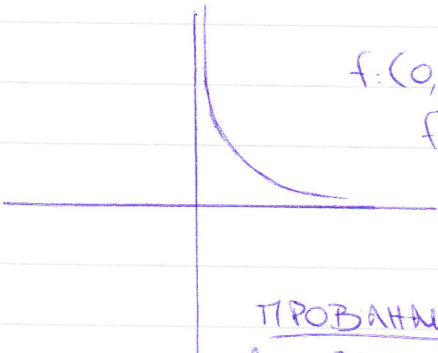
Το ίδιο ερώτημα για πεδίο ορισμού $(a,b]$, $[a,b)$

(α)



$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

φραγμένη



$f:(0,1) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

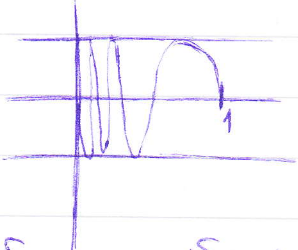
ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

Δεν είναι ομ. συνεχής

Το είδαμε με τις $x_n = \frac{1}{2n}$, $y_n = \frac{1}{3n}$

(α'') $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ όταν $x\to0^+$ και $\cos\frac{1}{x}=1$ πάει στο $+\infty$.



Για παράδειγμα $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-2n\pi\cos(2n\pi)$
$=-2n\pi\to-\infty$.

Πρόβλημα

$\nexists \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, παρόλο που είναι φραγμένη.

Δεν είναι ομ. συνεχής

Θέτουμε $x_n=\frac{1}{2n\pi}$

$y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

Τότε $x_n,y_n\to0 \Rightarrow x_n-y_n\to0$.
και $f(x_n)-f(y_n)=\sin(2n\pi)-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$
$=0-1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1\neq0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση
Τότε, η f είναι ομ. συνεχής $\Leftrightarrow$ υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αποδ.

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση: Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία, $x_n\to A$ τότε η $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική

Οι ομ. συνεχείς συναρτήσεις στέλνουν βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες

Αποδ.

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο A
Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall\ n,m\geq n_0$
$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$.

~~Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ αν $n,m\geq n_0$ τότε~~
~~υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$~~

Αφού η f είναι ομ. συνεχής, υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$.
" αν $u,v \in A$ και $|u-v|<\delta$ τότε $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$ " (*)
Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, αν $n,m \geq n_0$ τότε $|x_n-x_m|<\delta$
Τότε $\forall\, n,m \geq n_0$ $|x_n-x_m|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$ από την (*)

Για το Θεώρημα ($\Leftarrow$).
Ξέραμε ότι η f είναι συνεχής στο (a,b) και ότι $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=m \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε επέκταση της f στο $[a,b]$ ως εξής.

$$F[x]=\begin{cases} l=\lim\limits_{x\to a^+} f(x), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ m=\lim\limits_{x\to b^-} f(x), & x=b \end{cases}$$

Τότε $\forall\, y\in[a,b]$ ισχύει $\lim\limits_{x\to y} F[x]=F(y)$
άρα η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.
Από το ΘΕΩΡΗΜΑ η F είναι ομοιόμορφα συνεχής

$\Downarrow$ (Άσκηση)

$f=F|_{(a,b)}$ ομ. συνεχής.

Άσκηση
Αν $g: A\to\mathbb{R}$ ομ. συνεχής και αν $B\subseteq A$ τότε η $g|_B$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
Λύση
Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε:
"αν $x,y\in A$ και $|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$
$\overset{B\subseteq A}{\Longrightarrow}$ "αν $x,y\in B$ και $|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$.

(⇒) Θα δείξουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (όμοια για το άλλο)

Βήμα 1: Θεωρούμε μια (x_n) στο (a,b) με

$x_n \to a^+ \Rightarrow (x_n)$ βασική $\xRightarrow[\text{λόγω οφ. συνέχειας}]{\text{Πρ.}}$ $(f(x_n))$ βασική

$\Rightarrow f(x_n) \to L \in \mathbb{R}$.

Βήμα 2: Δείχνω ότι: $\forall (y_n)$ στο (a,b) με $y_n \to a^+$ ισχύει $f(y_n) \to L$

Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ (υπάρχει).

Πράγματι, $y_n \to a^+ \Rightarrow \exists\, L' : f(y_n) \to L'$ (όπως στο βήμα 1).

Όμως

$x_n \to a^+,\ y_n \to a^+$

$\Downarrow$

$x_n - y_n \to 0$

$\Downarrow$ f ομ. συνεχής

$f(y_n) - f(x_n) \to 0$

$\Downarrow$

$f(y_n) = f(x_n) + (f(y_n) - f(x_n)) \to L + 0 = L$.

(7) Τι κάνουμε όταν το πεδίο ορισμού είναι $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$.

Πρώτο τέχνασμα: Έστω $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $b>a$. Αν η f είναι ομ. συνεχής στο $[b,+\infty)$ τότε είναι και στο $[a,+\infty)$.

Απόδ.

Ξέρουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[b,+\infty)$ αλλά και στο $[a,b]$ (κλειστό διάστημα).

Έστω ε>0

• f ομ. συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 : \forall\, x,y \in [a,b]$ (*) $\{|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$

• f ομ. συνεχής στο $[b,+\infty) \Rightarrow \exists\, \delta_2>0\ \forall\, x,y\in[b,+\infty)$ $\big(|x-y|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}\big)$ (**)

Ορίζουμε $\boxed{\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0}$

Έστω $x,y\in[a,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$. Θέλουμε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
(μπορώ $x<y$).

$|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(b)|+|f(b)-f(y)|$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:

(1) $x,y\in[a,b]$. Έχουμε και $|x-y|<\delta<\delta_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

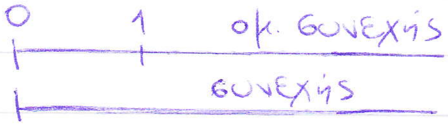
(2) $x,y\in[b,+\infty)$ Έχουμε και $|x-y|<\delta<\delta_2 \overset{(**)}{\Longrightarrow} |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

(3) $x<b<y$. Έχουμε $x,b\in[a,b]$ και $|b-x|=b-x<y-x=$
$=|y-x|<\delta\le\delta_1$
$\Rightarrow |f(x)-f(b)|<\varepsilon/2$.

Παράδειγμα: $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$.

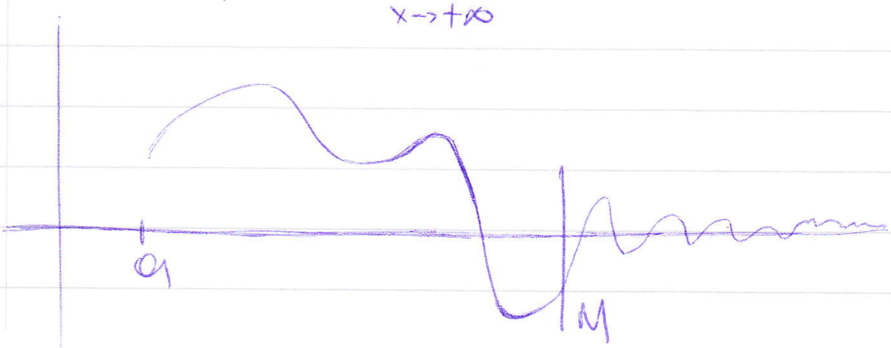
• $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Αν $x\in[1,+\infty)$ τότε $|f'(x)|=\frac{1}{2\sqrt{x}}\le\frac{1}{2}$

Άρα, η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[1,+\infty)$.
$\Rightarrow f$ Lipschitz στο $[1,+\infty)$.
$\Rightarrow f$ ομ. συνεχής στο $[1,+\infty)$

Τώρα, 

$\left.\begin{array}{l} f \text{ ομ. συνεχής στο } [1,+\infty) \\ \text{συνεχής στο } [0,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow f$ ομ. συνεχής στο $[0,+\infty)$

<u>Δεύτερο κριτήριο</u>: Έστω $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Υποθέτουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.



Απόδειξη

- Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $M=M(\varepsilon)>a$ ώστε: $\forall z \geq M$ $|f(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$
- Στο $[a,M]$ η f είναι ομ. συνεχής ως συνεχής
  $\Rightarrow \exists\ \delta>0$: αν $x,y\in[a,M]$ και $|x-y|<\delta$ τότε
  $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/3$ ⊛

Έστω $x,y\in[a,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$ (Θα δείξουμε ότι $f(x)-f(y)<\varepsilon$)

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις.

(1.) $x,y\geq M$ / Τότε $|f(x)|<\varepsilon/3$, $f(y)<\varepsilon/3$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)|+|f(y)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3<\varepsilon$

(2) $x,y\in[a,M]$ / Επειδή $|x-y|<\delta$, η ⊛ δίνει
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/3<\varepsilon$

(3.) $x<M<y$ / $x,M\in[a,M]$ και $|x-M|<|x-y|<\delta$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/3$ (από την ⊛).
Τότε $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(M)|+|f(M)-f(y)|$
$\leq |f(x)-f(M)|+|f(M)|+|f(y)|$
$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon$.

Ερωτήσεις Κατανόησης + Άσκηση 14

15) Η $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ είναι ομ. συνεχής στο $(0,1)$ (Σ ή Λ;)
$\lim_{x\to1^-}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=2$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ.

$\lim_{x\to0^+}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΗΣ.

16) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ στο $(0,1)$ / $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\to-\infty$

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ

17] Αν η $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και όχι φραγμένη τότε δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (Σ ή Λ;).

Σωστό

Έστω ότι είναι ομ. συνεχής. Τότε, $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = m$

και η $F(x)=\begin{cases} l & , x=0 \\ f(x) & , 0<x<1 \\ m & , x=1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

$\overset{\text{Απ I}}{\Rightarrow}$ F φραγμένη

Δηλ. $\exists\ M>0 \quad \forall\, x\in[0,1] \quad |F(x)|\le M$

$\Rightarrow \forall\, x\in(0,1) \quad |\underbrace{F(x)}_{=f(x)}| \le M$.

Δηλ. f φραγμένη ΑΤΟΠΟ

14] Εξετάστε αν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(1.) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$.

$f'(x)=3 \Rightarrow f'$ φραγμένη $\Rightarrow f$ Lipschitz $\Rightarrow f$ ομ. συνεχής.

(2.) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$

ΝΑΙ: Συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Αλλιώς: $|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| = \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{4}$

f' φραγμένη.

(3.) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$.

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\sin^2 x = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\sin x}_{\to 0} = 0$

ΝΑΙ

7.| $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos(x^3)}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\cos(x^3)}{x}=\cos 1$

- $0\le|f(x)|=\dfrac{|\cos(x^3)|}{x}\le\dfrac{1}{x}\xrightarrow{x\to+\infty}0$

NAI.

11.| $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\sin x$

$f'(x)=\sin x+x\cdot\cos x$

$x_n=2n\pi \Rightarrow f'(x_n)=2n\pi \quad (\sin x_n=0 , \cos x_n=1)$

$y_n=2n\pi+\dfrac{1}{n}$

Τότε $y_n-x_n=\dfrac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$f(y_n)-f(x_n)=y_n\cdot\sin y_n-x_n\cdot\sin x_n$

$=\left(2n\pi+\dfrac{1}{n}\right)\sin\left(\cancel{2n\pi}+\dfrac{1}{n}\right)\cancel{-2n\pi\cdot\sin(2n\pi)}$

$=2n\pi\sin\dfrac{1}{n}+\cancelto{0}{\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}}\longrightarrow 2\pi+0=2\pi\neq 0.$

$\quad\ \| $

$2\pi\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 2\pi\cdot 1=2\pi.$

<u>ΟΧΙ</u>

2/5/2012 16º μάθημα

Ομοιόμορφη συνέχεια - Ασκήσεις

· Ερωτήσεις κατανόησης (έχουν γίνει 15,16,17).

18) Αν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και αν η (x_n) είναι βασική ακολουθία τότε η $(f(x_n))$ είναι βασική (Σ ή Λ

Σωστό

(Πρόταση)

άλλη ερώτηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, (x_n) βασική $\overset{??}{\Longrightarrow} (f(x_n))$ βασ

(x_n) βασική $\xrightarrow{\text{κεφ. I}} \exists\ x \in \mathbb{R} : x_n \to x$ $\xrightarrow[\text{στο } x]{\text{αρχή της μεταφοράς}} f(x_n) \to f(x$

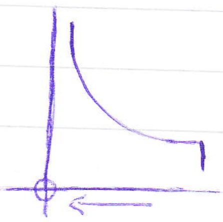
$\Rightarrow f(x_n)$ συγκλίνει $\xrightarrow{\text{κεφ. I}} (f(x_n))$ βασική.

Γενικά, η ομοιόμορφη συνέχεια είναι απαραίτητη
πχ. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Είναι συνεχής | $x_n = \frac{1}{2n} \to 0$ άρα είναι βασική

$0 \notin \Pi.O.(f) = (0,1)$

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} = 2n \to +\infty$.



Άρα η $(f(x_n))$ δεν είναι βασική

19) Αν η $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε η $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n \geq 2}$ συγκλίνει (Σ ή Λ;)

Η $x_n = \frac{1}{n} \to 0 \xrightarrow{\text{κεφ. I}} (x_n)$ βασική $\xrightarrow{f \text{ ομ. συνεχής}} (f(x_n))$ βασική.

$\xrightarrow{\text{κεφ. I}} (f(x_n))$ συγκλίνει

Το "ομοιόμορφα συνεχής" χρειάζεται για την $f(x) = \frac{1}{x}$, αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \to +\infty$

20) Οι $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ είναι ομ. συνεχής αλλά η $(f\cdot g)(x)=x\cdot \sin x$ ΟΧΙ (Σ ή Λ;).

Σωστό

(α.) $f(x)=x$ είναι ομ. συνεχής

$|f(x)-f(y)|=|x-y|$ - Lipschitz με σταθ. 1.

(β.) $g(x)=\sin x$ είναι ομ. συνεχής

$|g'(x)|=|\cos x|\leq 1$.

Η g' είναι φραγμένη $\Rightarrow$ g Lipschitz $\Rightarrow$ g ομ. συνεχής.

(γ.) η $\overset{h}{(f\cdot g)}(x)=x\cdot\sin x$ δεν είναι ομ. συνεχής.

• $h'(x)=\sin x+x\cdot\cos x$ / $h'(2n\pi)=2n\pi\to+\infty$ / h' όχι φραγμένη

• "Δυο ακολουθίες" $x_n=2n\pi$, $y_n=2n\pi+\frac{1}{n}$ | $y_n-x_n\to 0$.

$$f(y_n)-f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}-0=2\pi\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$$

$$\to 2\pi\neq 0.$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Γινόμενο ομ. συνεχών συναρτήσεων δεν είναι πάντα ομ. συνεχής

21) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 2x, & x\leq 0\end{cases}$ είναι ομ. συνεχής. (Σ ή Λ;).

Με τον ορισμό

• $x,y>0$ $|f(x)-f(y)|=|x-y|\leq 2|x-y|$

• $x,y\leq 0$ $|f(x)-f(y)|=|2x-2y|=2|x-y|$

• $x>0, y\leq 0$ $|f(x)-f(y)|=|\underbrace{x-2y}_{+}|=x-2y\leq \overset{x+(x-2y)}{2x}-2y=2(x-y)=2|x-y|$

Δηλ. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $|f(x)-f(y)|\leq 2|x-y|$.

Lipschitz με σταθερά 2 $\Rightarrow$ ομ. συνεχής.

ΣΩΣΤΟ

Άλλος τρόπος: Η $f(x)=x$ είναι ομ. συνεχής στο $[0,+\infty)$ + "κόλλημα"
Η $f(x)=2x$ — " — στο $(-\infty,0]$

22.) Κάθε φραγμένη και συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής (Σ ή Λ;)

ΛΑΘΟΣ: Η $f(x)=\cos(x^2)$ είναι συνεχής, φραγμένη απολύτως από 1 και δεν είναι ομ. συνεχής.

Το έχουμε δει: $f'(x)=-2x\sin(x^2)$ - όχι φραγμένη.

$$\left|f'\left(\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\right| = 2\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}} \to +\infty$$

$x_n=\sqrt{n\pi+\pi/2}$
$y_n=\sqrt{n\pi+\pi/4}$

Πράξεις δείχνουν ότι
$y_n-x_n\to 0$
$f(y_n)-f(x_n)\not\to 0$.

Άσκηση 7: Έστω $f,g: A\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς
Δείξτε ότι: (α) Η $f+g$ είναι ομ. συνεχής (Ειδικότερα, $f+c$ είναι ομ. συνεχής).
(β.) Η $f\cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομ. συνεχής ($x, \sin x$).
αλλά αν οι f και g είναι φραγμένες, τότε είναι.

(α.) Έστω $\varepsilon>0$. Αφού η f είναι ομ. συνεχής, υπάρχει $\delta_1>0$:
αν $x,y\in A$ και $|x-y|<\delta_1$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$
Αφού η g είναι ομ. συνεχής, υπάρχει $\delta_2>0$:
αν $x,y\in A$ και $|x-y|<\delta_2$ τότε $|g(x)-g(y)|<\varepsilon/2$
Θέτουμε $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$
Τότε, αν $x,y\in A$ και $|x-y|<\delta$
έχουμε $|(f+g)(x)-(f+g)(y)| \le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$
$< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

$|f(x)+g(x) - f(y)-g(y)| \le |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)|$
$<\varepsilon/2+\varepsilon/2$

γιατί $|x-y|\le\delta$ $\le\delta_1$ $\le\delta_2$

(β.) Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι ομ. συνεχής και φραγμένες.
Υπάρχει $M>0 : \forall x \in A \quad |f(x)| \leq M \;,\; |g(x)| \leq M$.
Έστω $\varepsilon > 0$

• f ομ. συνεχής $\Rightarrow \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$: αν $x, y \in A$ και $|x-y| < \delta_1$ τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2M$

• g ομ. συνεχής $\Rightarrow \exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$: αν $x, y \in A$ και $|x-y| < \delta_2$ τότε $|g(x)-g(y)| < \varepsilon/2M$

Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Έστω $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ $\xrightarrow{\delta \leq \delta_1} |x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2M$.

$\xrightarrow{\delta \leq \delta_2} |x-y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \varepsilon/2M$.

Τότε, $|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y))|$
$\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq M} \cdot |g(x)-g(y)| + \underbrace{|g(y)|}_{\leq M} \cdot |f(x)-f(y)| \leq M(|g(x)-g(y)| + |f(x)-f(y)|)$
$< M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon$

Υπενθύμιση (βασικό κριτήριο)
Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
Άσκηση 8: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με την εξής ιδιότητα:

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; M = M(\varepsilon) > 0 : \text{αν } |x| \geq M \text{ τότε } |f(x)| < \varepsilon \quad (*)}$$

Δείξτε ότι η f είναι ομ. συνεχής

Η υπόθεση $(*)$ είναι ακριβώς ισοδύναμη με την
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(α.) Η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\xrightarrow[\text{κριτήριο}]{\text{βασικό}}$ η f είναι ομ. συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(β.) Η $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\xrightarrow[\text{κριτήριο}]{\text{βασικό}}$ η f είναι ομ. συνεχής στο $(-\infty,0]$.

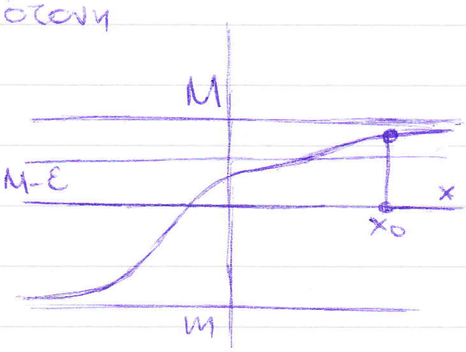
Μετά, "κόλλημα"

Άσκηση 9 $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$.
Δείξτε ότι η f είναι ομ. συνεχής.

Θεωρούμε την $g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-l$.
Η g είναι συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0 \xrightarrow[\text{κριτήριο}]{\text{βασικό}}$ g είναι ομ. συνεχής

Η σταθερή συνάρτηση $h(x)=l$ είναι ομ. συνεχής
Από την Άσκηση 7, η $f=g+h$ είναι ομ. συνεχής.

25.) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη
Δείξτε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.



Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα.
Δείχνουμε ότι $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Θεωρούμε το $\Gamma=\{f(y): y\in\mathbb{R}\}$
Αφού η f είναι φραγμένη, το Γ είναι άνω και κάτω φραγμένο.
$\Rightarrow$ το Γ έχει supremum M και infimum m

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=M$. και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$

Έστω $\varepsilon>0$. Ο $M-\varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του Γ $\Rightarrow$
$\exists\, x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)>M-\varepsilon$.
Αφού η f είναι $\uparrow$, $\forall\, x\geq x_0$ $M+\varepsilon>M\geq f(x)\geq f(x_0)>M-\varepsilon$.
$\Rightarrow \forall\, x\geq x_0$ $|f(x)-M|<\varepsilon$.
Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=M$

Από το βασικό κριτήριο

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = M$

$\Downarrow$

f ομ. συνεχής στο $[0,+\infty)$

$f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ συνεχής

$\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = m$

$\Downarrow$

f ομ. συνεχής στο $(-\infty,0]$.

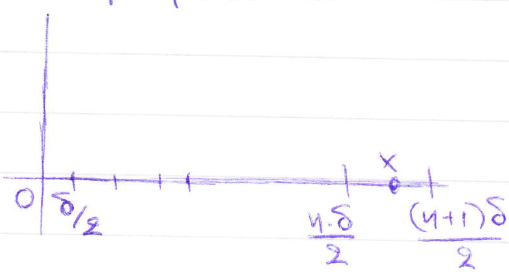
και "κόλλημα"

<u>Άσκηση 10</u>

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής.

Δείξτε ότι υπάρχουν $A,B>0$ ώστε: $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)|\le A|x|+B$.

Κοιτάμε μόνο $x>0$



Παίρνω $\varepsilon=1>0$

Υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε

αν $x,y\ge 0$ και $|x-y|<\delta$

τότε $|f(x)-f(y)|<1$.

Έστω $x>0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει

$n\ge 0,\ n=n(x):\ \frac{n\delta}{2}\le x<\frac{(n+1)\delta}{2}$, $\left(n=\left\lfloor\frac{2x}{\delta}\right\rfloor\right)$

Τότε $|f(x)-f(0)| = \Big|\big(f(x)-\cancel{f(\tfrac{n\delta}{2})}\big)+\big(\cancel{f(\tfrac{n\delta}{2})}-\cancel{f(n-\tfrac{\delta}{2})}\big)$

$\cancel{+\dots}+\big(\cancel{f(\delta)}-\cancel{f(\tfrac{\delta}{2})}\big)+\big(\cancel{f(\tfrac{\delta}{2})}-f(0)\big)\Big|$

$\le \underbrace{\left|f(x)-f\left(\frac{n\delta}{2}\right)\right|}_{\text{απέχουν } \delta} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left|f\left(\frac{k\delta}{2}\right)-f\left((k-1)\frac{\delta}{2}\right)\right|}_{\text{απέχουν } \frac{\delta}{2}<\delta}$

$\underset{(*)}{<} 1+\sum_{k=1}^{n} 1 = n+1.$

Άρα

$|f(x)|\le|f(0)|+|f(x)-f(0)|<n+|f(0)|+1$

$\underset{n=\lfloor\frac{2x}{\delta}\rfloor}{<} \underbrace{\frac{2}{\delta}}_{A}\,x+\underbrace{|f(0)|+1}_{B}$