27/4/2012 14º μάθημα

Ομοιόμορφη συνέχεια

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

Ορισμός της συνέχειας στο x: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και έστω $x \in A$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε "αν $y \in A$ και $|y-x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$"

Ορισμός της συνεχούς συνάρτησης: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$.

f συνεχής στο x: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\delta(\varepsilon)}{\underset{\shortparallel}{\delta}} > 0 : (y \in A \cap |y-x| < \delta) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

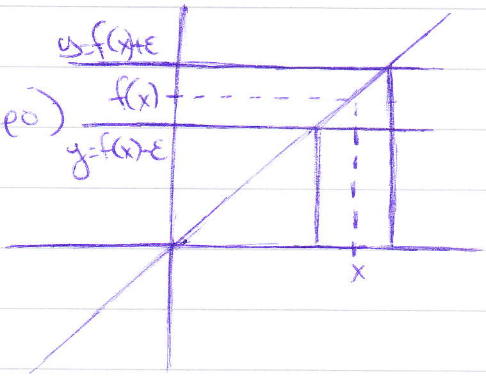
f συνεχής (στο A): $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in A \ \exists \underset{\delta(\varepsilon, x)}{\underset{\shortparallel}{\delta}} > 0 : y \in A \cap |y-x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

Δυο παραδείγματα:

1.) $f(x) = x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Μου δίνουν $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$.

Ζητάω το "καλύτερο" ($\rightsquigarrow$ το μεγαλύτερο) $\delta = \delta(\varepsilon, x)$ για το οποίο ικανοποιείται ο ορισμός της συνέχειας της f στο x.

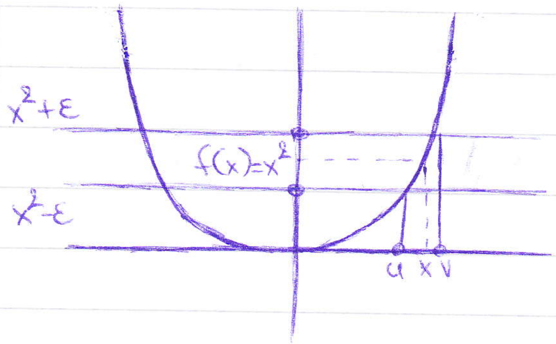


Για $\delta = \varepsilon$

Έστω $y \in \mathbb{R}$ με $|y-x| < \varepsilon$.

Τότε $|f(y) - f(x)| = |y-x| < \varepsilon$.

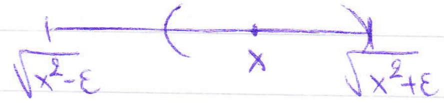
2] $f(x)=x^2$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



Έστω $x>0$ και $\varepsilon>0$
(μπορώ να υποθέσω $0<\varepsilon<x^2$)
Το διάστημα των $y>0$ για τα οποία $|y^2-x^2|<\varepsilon$ είναι το $(u,v)=\left(\sqrt{x^2-\varepsilon},\sqrt{x^2+\varepsilon}\right)$

$u^2=x^2-\varepsilon \Rightarrow u=\sqrt{x^2-\varepsilon}$

$v^2=x^2+\varepsilon \Rightarrow v=\sqrt{x^2+\varepsilon}$



Έχουμε $v-x=\sqrt{x^2+\varepsilon}-x=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x}$

$$x-u=x-\sqrt{x^2-\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2-\varepsilon}+x}>\frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x}=v-x$$

Το "v είναι πιο κοντά στο x απ' ότι το u".
Παίρνω $\delta=\min\{v-x,\,x-u\}=v-x=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x}=\delta(\varepsilon,x)$.

Το δ εξαρτάται και από το x και από το ε και μάλιστα όσο μεγαλώνει το x τόσο μικραίνει το $\delta(\varepsilon,x)$.

<u>Ισχυρισμός:</u> Αν μου δώσουν $\varepsilon>0$ δεν μπορώ να βρω $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $\left(y\in\mathbb{R}\ \ |y-x|<\delta \Rightarrow |y^2-x^2|<\varepsilon\right)$.

Απευθείας απόδειξη του ισχυρισμού:
Έστω $\varepsilon>0$. Υποθέτω ότι υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$:
$\forall\, x\ \left(\ |y-x|<\delta \Rightarrow |y^2-x^2|<\varepsilon\ \right)$
Παίρνω τυχόν $x\in\mathbb{R}$, $x>0$ και επιλέγω $y=x+\frac{\delta}{2}$
Τότε, $|y-x|=\left|x+\frac{\delta}{2}-x\right|=\frac{\delta}{2}<\delta \xRightarrow[\text{υπόθεση}]{} \left|\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2-x^2\right|<\varepsilon$.

$\Rightarrow x^2+\delta x+\frac{\delta^2}{4}-x^2<\varepsilon$

$\Rightarrow \delta x<\varepsilon \Rightarrow x<\varepsilon/\delta$ ΑΤΟΠΟ γιατί υπάρχει $x>\varepsilon/\delta$.

Ορισμός: (ομοιόμορφη συνέχεια).
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Παραδείγματα

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής ($\delta(\varepsilon) = \varepsilon$).
(αν $|y-x| < \overset{\delta = \delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ τότε $|f(y) - f(x)| = |y-x| < \varepsilon$)

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής
3. Έστω $M > 0$ και $f: [-M, M] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
$(*)$ $|y^2 - x^2| = |y+x||y-x| \leq (|y| + |x|)|y-x| \leq 2M|y-x|$
Από εδώ έπεται ότι η f είναι ομ. συνεχής: έστω $\varepsilon > 0$
Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Τότε, από την $(*)$ αν $|y-x| < \delta = \varepsilon/2M$

Τότε $|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| < 2M\delta = \varepsilon$

Μια πρώτη κλάση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται Lipschitz συνεχής με σταθερά $M > 0$ αν $\forall\, x, y \in A$ ισχύει
$(*)$ $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$

Πρόταση: Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αποδ.
Έστω ότι η f ικανοποιεί την $(*)$. Έστω $\varepsilon > 0$
Παίρνουμε $\delta = \varepsilon/M$. Τότε, για κάθε ζεύγος $x, y \in A$ με $|y-x| < \delta$
έχουμε $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x| < M\delta = \cancel{M} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{M}}$

Πρόταση (και Άσκηση 3).

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο (a,b).
Τότε, η f είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη συνάρτηση στο (a,b)

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Ξέρουμε ότι υπάρχει $M>0$ ώστε $\forall\, x,y\in[a,b]$

$$\circledast \quad |f(y)-f(x)|\le M|y-x|$$

Έστω $x\in(a,b)$. Έχουμε $f'(x)=\lim\limits_{y\to x}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

Από την $\circledast$ $\forall\, y\neq x$: $\left|\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\le M$

$$|f'(x)|=\left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=\lim_{y\to x}\underbrace{\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|}_{\le M}\le M$$

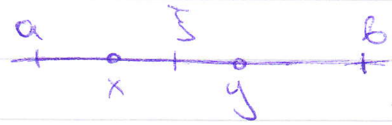
($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Υπάρχει $A>0$:
$\forall\, \xi\in(a,b)$: $|f'(\xi)|\le A$

- Έστω $x,y\in[a,b]$, $y\neq x$.

Υπάρχει ξ ανάμεσα στα x,y ώστε $f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$
(Θεώρημα Μέσης Τιμής)

$$\Rightarrow |f(y)-f(x)|=\underbrace{|f'(\xi)|\,|y-x|\le A}_{\le}\,|y-x|$$

Άρα η f είναι Lipschitz με σταθερά A όποιο κι αν είναι το ξ



Πρόταση: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι συνεχής.

Αποδ.

Έστω $x_0 \in A$ τυχόν. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.
Ζητάμε $\delta > 0$: αν $y \in A$ και $|y - x_0| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon$
Έστω $\varepsilon > 0$
Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: (∗) "αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$"
Ειδικότερα, σταθεροποιώντας $x = x_0$ στην (∗) έχουμε
(∗∗) "αν $y \in A$ και $|x_0 - y| < \delta$ τότε $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$"
Δηλ. η f είναι συνεχής στο x_0.

Περιγραφή της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών

Θεώρημα: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$.
Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν:
"για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στο A
με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$". (+)

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω (x_n), (y_n) δυο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$.
Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.
Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$
$\forall n \geq n_0: |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$.
Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$:
(∗) "αν $|x - y| < \delta$, $x, y \in A$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$"
Αφού $x_n - y_n \to 0$ υπάρχει n_0: $\forall n \geq n_0$ $|x_n - y_n| < \delta$.
Τότε $\forall$ $n \geq n_0$ αφού $|x_n - y_n| < \delta$ η (∗) μας $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$
(βάζω $x = x_n$ και $y = y_n$)

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την (+) αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $\forall \delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x(\delta), y(\delta) \in A$ με $|x(\delta) - y(\delta)| < \delta$ αλλά $|f(x(\delta)) - f(y(\delta))| \geq \varepsilon$

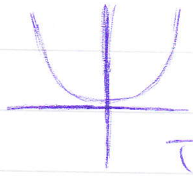
Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n, y_n \in A$ ώστε $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Από την $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ παίρνουμε $x_n - y_n \to 0$.
Τότε, από την $(\ast)$,
$f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Αυτό είναι άτοπο.

$$\underbrace{|f(x_n) - f(y_n)|}_{\downarrow \atop 0} \geq \varepsilon$$

Δηλ. $\underline{0 \geq \varepsilon}$

Παραδείγματα:

(α.) Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής



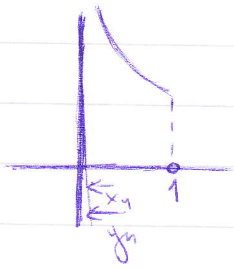
Παίρνω $x_n = n$ και $y_n = n + \frac{1}{n}$

Τότε $y_n - x_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Όμως, $f(y_n) - f(x_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0$.

Άρα, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής
(θα έπρεπε $f(y_n) - f(x_n) \to 0$).

(β.) $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$



Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$.

$x_n = \frac{1}{n}$

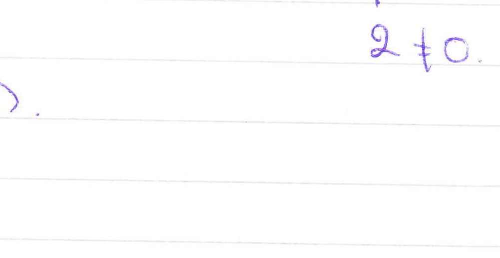
$y_n = \frac{1}{2n}$

$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$.

$f(x_n) - f(y_n) = n - 2n = -n \to -\infty$.

Άρα, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ.) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^2)$



$f'(x) = -2x\sin(x^2)$

Αν $x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ τότε $x_n^2 = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(x_n^2) = \pm 1$

$\Rightarrow |f'(x_n)| = 2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow +\infty$

$\to$ Αυτά είναι σημεία στα οποία η f' είναι μεγάλη.

Ορίζουμε $y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}$

Έχουμε $x_n - y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{4}}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Όμως, $|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos(x_n^2) - \cos(y_n^2)|$

$= \left|\cancel{\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} - \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$

<u>Συμπέρασμα:</u> Η f **δεν** είναι ομοιόμορφα συνεχής

(ΕΙΝΑΙ ΜΑΛΙΣΤΑ ΦΡΑΓΜΕΝΗ, ΣΥΝΕΧΗΣ και ΟΧΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΗΣ!)

<u>ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Αν η $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

("συνεχής σε κλειστό διάστημα είναι αυτομάτως ομοιόμορφα συνεχής")

<u>Απόδειξη:</u> Με απαγωγή σε άτοπο.

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ και δυο ακολουθίες $x_n, y_n \in [a,b]$ ώστε $x_n - y_n \to 0$ αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

(αυτό το βήμα έγινε στην απόδ. της ($\Leftarrow$) του χαρακτηρισμού της ομ. συνέχειας μέσω ακολουθιών).

Η (x_n) είναι στο $[a,b]$ άρα είναι φραγμένη

Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Έχουμε $x_{k_n} \to z \in [a,b]$

$$\left(a \leq \underset{\substack{\downarrow \\ z}}{x_{k_n}} \leq b \Rightarrow a \leq z \leq b\right)$$

Τότε, $y_{k_n} = \underbrace{(y_{k_n} - x_{k_n})}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + x_{k_n} \to 0 + z = z$

υπακολουθία της $y_n - x_n$

Τότε, από την αρχή της μεταφοράς για την f στο σημείο $z \in [a,b]$

$$\left.\begin{aligned} &f(x_{k_n}) \to f(z) \\ \text{και } &f(y_{k_n}) \to f(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to 0.$$

Όμως, έχουμε $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε n

$$\Downarrow$$

$|f(x_{k_n})-f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ για κάθε n.

$$\downarrow$$

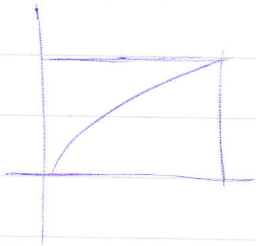
0 Άτοπο ΕΣΟ.

Άσκηση 2

Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνεχής $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομ. συνεχής (το είδαμε). Ισχύει το αντίστροφο;

ΟΧΙ

παράδειγμα: $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x}$



Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα άρα ομοιόμορφα συνεχής.

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. δηλ. η f' δεν είναι φραγμένη

Από Άσκηση 3. η f δεν είναι Lipschitz συνεχής.