6/4/2012. 11º μάθημα.

Ο αριθμός e (β' μέρος).

Ο e ορίστηκε στον Απ. Λογισμό I ως εξής:
δείξαμε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη (π.χ. από τον 4) άρα συγκλίνει.
Τότε, ορίσαμε $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} a_n$

Θεώρημα: Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει και

$0! = 1$ ορ.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Απόδειξη

(α.) Η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ συγκλίνει

Κριτήριο λόγου: $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{k!}{k!(k+1)} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1$

άρα η σειρά συγκλίνει.

Άρα, υπάρχει ο $s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} S_n$, όπου $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

(β.) Θα δείξαμε ότι $e = s$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\cancel{(n-k)!}(n-k+1)\dots n}{k!\cancel{(n-k)!}}$$

① $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq S_n$

Χρησιμοποιούμε την $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^{n-k} b^k$

Έχουμε $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$

α, β

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)\dots(n-1)n}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n-k+1}{n} \dots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 1}_{\leq 1}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n$$

Έχουμε $\underset{\downarrow e}{a_n} \leq \underset{\downarrow s}{S_n}$ για κάθε n. Άρα, $\boxed{e \leq S}$

Μένει να δείξουμε ότι $e \geq S$
Αυτό θα το δείξουμε ως εξής: Θα σταθεροποιήσουμε $n \in \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι $e \geq S_n$. Μετά, αφού $S_n \to S$ θα έχουμε $e \geq \lim_{n\to\infty} S_n = S$

Έχουμε n σταθερό.
Παίρνουμε $k > n$ και γράφουμε

$$e \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!}\left(1-\frac{s-1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 1$$

$$\geq \sum_{s=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{s!}\left(1-\frac{s-1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 1}_{\downarrow k\to\infty \;\; \frac{1}{s!}} \xrightarrow[\substack{k\to\infty \\ (n=\text{σταθ})}]{} \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} = S_n$$

γιατί $\frac{1}{k} \to 0, \ldots, \frac{s-1}{k} \to 0$.

Άρα, $e \geq \underset{\downarrow S}{S_n}$ για κάθε n.

Έπεται ότι $e \geq S$.

<u>Παράδειγμα</u> $n=3$

Παίρνω $k>3$ και γράφω $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \geq \sum_{s=0}^{3} \frac{1}{s!}\left(1-\frac{s-1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 1$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 1}_{\downarrow\ \frac{1}{2!}} + \underbrace{\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot 1}_{\downarrow\ \frac{1}{3!}}$$

Άρα $\underset{\overset{\parallel}{e}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = S_3$.

Θεώρημα: Ο e είναι άρρητος.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$

Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός. Τότε υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $e = \frac{m}{n}$ (και οι δυο θετικοί, διότι $e > 0$).

Άρα

$$\overbrace{\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)}^{A} + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right) = \frac{m}{n} = e$$

Πολλαπλασιάζω τα δυο μέλη της ισότητας επί $n!$

Τότε $An! =$ φυσικός και $en! = \frac{m}{n} \cdot n! = m(n-1)! =$ φυσικός

Άρα

$$0 < n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right) = \underbrace{n! \cdot e - n! A}_{\text{ακέραιος}}$$

δηλ. $n!\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots\right) =$ φυσικός

$$\Rightarrow x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} + \dots$$

$=$ φυσικός

Έχουμε $x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \dots (k+1)} + \dots$

γιατί $n+1 \geq 1+1 = 2$

$(n+1)(n+2) \geq 2 \cdot 3$

$\vdots$

όποιο κι αν είναι το n

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{11}{12} < 1 \quad \text{Άτοπο.}$$

Σημείωση: Αν $0 < x < 1$ είδαμε ότι $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=n}^{\infty} x^k = \sum_{k=n}^{\infty} x^n \cdot x^{k-n} = x^n \sum_{k=n}^{\infty} x^{k-n}$

$$\overset{k-n=l}{=} x^n \sum_{l=0} x^l = \frac{x^n}{1-x}$$

πχ. εδώ χρειαστήκαμε τα

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k} \underset{\substack{x=\frac{1}{2} \\ n=3}}{=} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Το κριτήριο του Dirichlet

ΛΗΜΜΑ (άθροιση κατά μέρη - Abel)
Έστω $(a_k),(b_k)$ δυο ακολουθίες
Ορίζουμε $S_0=0$ και $S_n=a_1+\dots+a_n$, $n\geq 1$
Τότε, για κάθε $1\leq m<n$ ισχύει:
$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1})+S_n b_n - S_{m-1}b_m$$

Απόδειξη:
Η βασική παρατήρηση είναι ότι: $\boxed{a_k=S_k-S_{k-1}}$, $k=1,2,\dots$
(στην περίπτωση $k=1$
$a_1=S_1-\cancel{S_0}$).

Γράφουμε
$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n}(S_k-S_{k-1})b_k = \sum_{k=m}^{n} S_k b_k - \sum_{k=m}^{n} S_{k-1}b_k$$
$$= \sum_{k=m}^{n} S_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} S_k b_{k+1}$$
$$= S_n b_n + \underbrace{\sum_{k=m}^{n-1} S_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} S_k b_{k+1}} - S_{m-1}b_m$$
$$= \sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1}) + S_n b_n - S_{m-1}b_m$$

$$\sum_{k=m}^{n} S_{k-1}b_k \underset{l=k-1}{=} \sum S_l b_{l-1}$$

Θεώρημα (Κριτήριο Dirichlet).

Έστω $(a_k),(b_k)$ δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών.
Υποθέτουμε ότι:
(α.) Η ακολουθία $S_n=a_1+\dots+a_n$ είναι φραγμένη
(β.) Η (b_k) έχει μη αρνητικούς όρους, είναι φθίνουσα κ' $b_k\to 0$.
Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Υπάρχει $M>0$: $|S_n| \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (από το (α)).
Θεωρούμε την ακολουθία $t_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Θα δείξουμε ότι η (t_n) είναι βασική $\Rightarrow$ (t_n) συγκλίνει σε κάποιον $t \overset{\text{ορ.}}{\Rightarrow} t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$

Θεωρούμε $n>m$ και γράφουμε

$$|t_n - t_m| = |a_{m+1} b_{m+1} + \dots + a_n b_n| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k \right| =$$

$$\overset{1^{o}}{=} \left| \sum_{k=m+1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n - S_m b_{m+1} \right|$$

$$\le \sum_{k=m+1}^{n-1} |S_k| (b_k - b_{k+1}) + |S_n| b_n + |S_m| b_{m+1}.$$

$$\le M \sum_{k=m+1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + M \cdot b_n + M b_{m+1}$$

$$= M \Big[(b_{m+1} - \cancel{b_{m+2}}) + (\cancel{b_{m+2}} - \cancel{b_{m+3}}) + \cancel{\dots} + (\cancel{b_{n-2}} - \cancel{b_{n-1}}) + (\cancel{b_{n-1}} - \cancel{b_n}) + (\cancel{b_n} + b_{m+1}) \Big]$$

$$= 2M b_{m+1} \quad (*)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $b_k \to 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall\ k \ge k_0 \quad 0 \le b_k < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Τότε, αν $n \ge m \ge k_0$ έχουμε (από την $(*)$)

$$|t_n - t_m| \le 2M b_{m+1} \underset{m+1 \ge k_0}{<} \cancel{2M} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{2M}}$$

Άρα, η (t_n) είναι βασική.

<u>Βασική Εφαρμογή</u> : <u>Το κριτήριο του Leibniz</u>

Έστω (b_k) φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών με $b_k \to 0$. Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ συγκλίνει.

εναλλάσσουσα σειρά

Απόδειξη:
Θεωρούμε την $a_k = (-1)^{k-1}$
Έχουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1} = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

Άρα $|S_n| \le 1$ — Η (S_n) είναι φραγμένη
Από το κριτήριο του Dirichlet, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ συγκλίνει

Παραδείγματα

1.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ - Εναλλάσσουσα με $b_k = \frac{1}{k} \searrow 0$
Από Leibniz συγκλίνει.
(Παρατήρηση: η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως
διότι $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ - αποκλίνει).

2.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ - Εναλλάσσουσα με $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \searrow 0$
$\xRightarrow{\text{Leibniz}}$ συγκλίνει.

3.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln k}$ - Εναλλάσσουσα με $b_k = \frac{1}{\ln k} \searrow 0$
$\xRightarrow{\text{Leibniz}}$ συγκλίνει.

Άλλο παράδειγμα εφαρμογής του κριτηρίου Dirichlet

Σειρές της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos x$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ $(x \in \mathbb{R})$

όπου $b_k \ge 0$, (b_k) φθίνουσα, $b_k \to 0$
Θεωρούμε την $a_k = \cos kx$. Αν (S_n) φραγμένη όπου
$S_n = a_1 + \dots + a_n = \boxed{\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx}$
τότε εφαρμόζεται το κριτήριο του Dirichlet.

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$.
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a-b)$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$
$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$. ⊛

Γράφουμε $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right)$$

$$\overset{=}{⊛} \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\cancel{\frac{3x}{2}} - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5x}{2} - \cancel{\sin\frac{3x}{2}} + \ldots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cancel{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Άρα $|S_n| = |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx|$

$$\leq \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x| + |\sin\frac{x}{2}|}{|2\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leftarrow M$$

Συμπέρασμα: αν $x \neq 2k\pi$ τότε $\forall n$

$$|S_n| = |\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx| \leq M = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

Εφαρμογή: Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{\sqrt{x}}$ συγκλίνει αν $x \neq 2k\pi$.

Απόδειξη: Θέταμε $a_k = \cos kx$. Τότε $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} = M$.

Η $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \searrow 0$. Άρα η σειρά συγκλίνει από Dirichlet.

23/11/2012 μάθημα 12ο

Ερωτήσεις Κατανόησης

7.) Αν $a_k > 0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Σωστό

Αφού $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_0 \ \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$

$\Rightarrow a_{k_0} < a_{k_0+1} < a_{k_0+2} < \dots$ τότε $a_k \not\to 0$.

$\Rightarrow \sum a_k$ αποκλίνει.

8.) Αν $a_k \to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

Λάθος

Θεωρούμε την $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$. Τότε $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0 \Rightarrow a_k \to 0$

Αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ (αποκλίνει)

9.) Αν $a_k > 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

Λάθος

Αν $a_k = \frac{1}{k^2}$ τότε $\sum a_k = \sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει αλλά $\sum \sqrt{a_k} = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

10.) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

Λάθος

Αν $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

(από το κριτήριο Leibniz - εναλλάσσουσα και $\frac{1}{\sqrt{k}} \downarrow 0$)

Όμως $\sum a_k^2 = \sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

11.) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και (a_{k_n}) είναι υπακολουθία της (a_n) τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

Λάθος

Αν θεωρήσουμε την $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ τότε η $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Leibniz

Θεωρούμε την (a_{2n-1}). Τότε, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ αποκλίνει

Συγκρίνω με την $b_n = \frac{1}{n}$. Έχω $\frac{\frac{1}{2n-1}}{b_n} = \frac{n}{2n-1} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$.

άρα η $\sum \frac{1}{2n-1}$ κάνει ότι και η $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ δηλ. αποκλίνει.

13.) Η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6 \dots (2k)}{k!}$ συγκλίνει.

Λάθος

Παρατηρούμε ότι $a_k = \frac{(2\cdot 1)(2\cdot 2)(2\cdot 3)\dots(2\cdot k)}{k!} = \frac{2^k\, 1\cdot 2\cdot 3 \dots k}{k!}$

$$= \frac{2^k \cdot \cancel{k!}}{\cancel{k!}} \longrightarrow +\infty.$$

άρα η $\sum a_k$ αποκλίνει.

Αλλιώς: με το κριτήριο του λόγου

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{\cancel{2\cdot 4\cdot 6 \dots 2k}(2k+2)}{(k+1)!}}{\frac{\cancel{2\cdot 4\cdot 6 \dots 2k}}{k!}} = \frac{k!(2k+2)}{(k+1)!} = \frac{\cancel{k!}(2k+2)}{\cancel{k!}(k+1)} = \frac{2k+2}{k+1} =$$

$$= 2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 2 > 1.$$

άρα η σειρά αποκλίνει.

14) Η $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^{\rho}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\rho < -1$.

Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά έχει ισοδύναμη συμπεριφορά με την $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\rho+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-2\rho-1}}$ (*)

Έχουμε $\frac{a_k}{k^{2\rho+1}} = \frac{k(1+k^2)^{\rho}}{k(k^2)^{\rho}} = \left(\frac{1+k^2}{k^2}\right)^{\rho} \longrightarrow 1^{\rho} = 1 > 0.$

Όμως η (*) συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $-2\rho-1 > 1 \Leftrightarrow 2\rho < -2$
$\Leftrightarrow \rho < -1$

12) Αν $a_k > 0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum a_k^2$ συγκλίνει.

Σωστό

1ος τρόπος: Αν $t_n = a_1^2 + \dots + a_n^2$ και $S_n = a_1 + \dots + a_n$
ξέρουμε ότι $\exists\, M > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ S_n \leq M$ (γιατί $\sum a_k$ συγκλίνει)
Όμως $t_n = a_1^2 + \dots + a_n^2 \leq (a_1 + \dots + a_n)^2 = S_n^2 \leq M^2$
αφού η t_n είναι άνω φραγμένη και $a_k^2 > 0$ η $\sum a_k^2$ συγκλίνει και η $\sum a_k$ συγκλίνει.

2ος τρόπος: $\frac{a_k^2}{a_k} = a_k \to 0$ γιατί $\sum a_k$ συγκλίνει

$\Rightarrow \sum a_k^2$ συγκλίνει (οριακό κριτήριο).

3ος τρόπος: Αφού $\sum a_k$ συγκλίνει έχουμε $a_k \to 0$.

Άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N} : \forall\, k \geq k_0 \quad 0 < a_k < 1$.
Τότε $\forall\, k > k_0 \quad 0 < a_k^2 < a_k < 1$

Από κριτήριο σύγκρισης η $\sum a_k^2$ συγκλίνει.

Ασκήσεις

26.) Ορίζουμε $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{αν ο } k \text{ είναι τετράγωνο φυσικού } (k=m^2, m=1,2,\dots) \\ \frac{1}{k^2}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Εξετάστε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

$(a_k): 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \underset{\frac{1}{2^2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \underset{\frac{1}{3^2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{9}}}, \frac{1}{10^2}, \dots$

Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_1 + \dots + a_n \leq 2S$

όπου $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους κ̛ φραγμένα μερικά αθροίσματα, θα συγκλίνει.

Παρατήρηση: Αρκεί να δείξουμε ότι: $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_{n^2} \leq 2S$

(τότε $n \leq n^2 \underset{(S_n)\nearrow}{\Rightarrow} S_n \leq S_{n^2} \leq 2S$)

Γράφουμε $S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k \text{ τέλειο} \\ \text{τετράγωνο}}} a_k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k \text{ όχι τέλειο} \\ \text{τετράγωνο}}} a_k =$

$= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k \text{ τέλειο} \\ \text{τετρ.}}} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n^2 \\ k \text{ όχι τέλειο} \\ \text{τετρ.}}} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} + \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k^2} \leq$

$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2S.$

$k = m^2$ κ̛ $1 \leq k \leq n^2$

$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{k} \leq n$

$\Rightarrow 1 \leq m \leq n$

29 Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, δείξτε ότι $n \cdot a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Με τον ορισμό :

Αν $s<n$ τότε

$(n-s)a_n \leq \underbrace{a_{s+1}+a_{s+2}+\dots+a_n}_{n-s}$

Αν επιπλέον $s<n/2$ δηλ. $n>2s$ τότε

$\frac{n}{2}a_n < (n-s)a_n \leq a_{s+1}+\dots+a_n$

$\Rightarrow n \cdot a_n < 2\underbrace{(a_{s+1}+\dots+a_n)}_{t_n - t_s}$

Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η ακολουθία (t_n) των μερικών αθροισμάτων είναι συγκλίνουσα, άρα βασική.

Άρα υπάρχει $s_0 \in \mathbb{N}$: "αν $n>s \geq s_0$ τότε (*) $|t_n - t_s| < \varepsilon/2$ "

Ορίζουμε $n_0 = 2s_0$ και δείχνουμε ότι "$\forall n \geq n_0$ ισχύει $0 < n a_n < \varepsilon$" Αυτό δείχνει ότι $n a_n \to 0$.

Έστω $n \geq n_0 = 2s_0$. Για το ζευγάρι $\underbrace{n > s_0}_{\text{από την (*)}} \geq s_0$ ισχύει $t_n - t_{s_0} < \varepsilon/2$

Όμως $\underset{\text{γιατί } (s_0 \leq n/2)}{\underbrace{(n-s_0)a_n}} \leq a_{s_0+1}+\dots+a_n = t_n - t_{s_0} < \varepsilon/2$

$\frac{n a_n}{2} = \left(n - \frac{n}{2}\right)a_n$ Αφού $\frac{n \cdot a_n}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ έχουμε $0 < n \cdot a_n < \varepsilon$.

Σχετικές ερωτήσεις:

(α) Έστω ότι $a_n \searrow 0$. Σωστό ή Λάθος; $n a_n \to 0 \Rightarrow \sum a_n$ συγκλίνει.

ΛΑΘΟΣ

$a_n = \frac{1}{n\log(n+1)} \searrow 0$ $n \cdot a_n = \frac{1}{\log(n+1)} \to 0$.

αλλά η $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log(n+1)}$ αποκλίνει.

(βασική εφαρμογή του κριτηρίου συμπύκνωσης - γενικά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow p>1$).

(β.) Έστω $a_k>0$ Σωστό ή λάθος;
Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει τότε $k \cdot a_k \to 0$.

<u>ΛΑΘΟΣ</u>

Αντιπαράδειγμα: $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k=m^2,\ m=1,2,\dots \\ \frac{1}{k^2}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Έχουμε $a_k>0$ και στην Άσκηση 26 είδαμε ότι η σειρά συγκλίνει.
Όμως, $k \cdot a_k \not\to 0$ γιατί η υπακολουθία $m^2 a_{m^2} = \cancel{m^2} \cdot \frac{1}{\cancel{m^2}} = 1 \to 1 \neq 0$.

Η $(k a_k)$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο 1,
άρα $k \cdot a_k \not\to 0$.

<u>37.</u>] Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

α.) Υποθέτουμε ότι $\sum k \cdot a_k$ συγκλίνει και δείχνουμε ότι $\sum a_k$ συγκλίνει
β.) Ισοδύναμα, θέτουμε $b_k = k \cdot a_k$, υποθέτουμε ότι $\sum b_k$ συγκλίνει και δείχνουμε ότι $\sum \frac{b_k}{k}$ συγκλίνει
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sum b_k \cdot \frac{1}{k}$

Η $\frac{1}{k} \downarrow 0$ και η $S_n = b_1 + \dots + b_n$ είναι φραγμένη γιατί $S_n \to \sum b_k$

Από κριτήριο Dirichlet η $\sum b_k \frac{1}{k}$ συγκλίνει

25/4/2012 13ο μάθημα

Παρασκευή : 1-4
Δευτέρα : 1-4

Δυναμοσειρές

Ορισμός: Δυναμοσειρά είναι κάθε σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$ (το x το βλέπαμε σαν παράμετρο και για κάθε δοσμένο $x \in \mathbb{R}$ εξετάζαμε αν η σειρά συγκλίνει ή όχι)

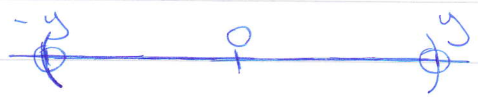
Βασική ερώτηση: Να βρεθεί το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει.

Για οποιαδήποτε επιλογή των a_k, η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει αν $x=0$.
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \overset{x=0}{=} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots = a_0)$

Το σύνολο που ψάχνουμε είναι πάντα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0:
$(-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R)$, $[-R,R]$, $(-\infty,+\infty)$, $\{0\}$

Πρόταση: Έστω $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ και έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ η αντίστοιχη δυναμοσειρά. Τότε:

(1.) Αν υπάρχει $y \neq 0$ ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ να συγκλίνει, και αν $|x| < |y|$ τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως



(2.) Αν η $\sum a_k y^k$ αποκλίνει για κάποιο $y \neq 0$ και αν $|x| > |y|$ τότε η $\sum a_k x^k$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

(1.) Ξέρουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k y^k}$ συγκλίνει. Τότε $a_k y^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Ειδικότερα, η $(a_k y^k)$ είναι φραγμένη, δηλ. $\exists\, M>0 : \forall k\in\mathbb{N}$ $|a_k y^k| \le M$.

Έστω $x\in\mathbb{R}$ με $|x|<|y|$. Γράφουμε

⊛ $|a_k x^k| = \left|a_k y^k \frac{x^k}{y^k}\right| = |a_k y^k| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^k \le M \cdot \underbrace{\left|\frac{x}{y}\right|^k}_{b_k}$

Η σειρά $\sum \left|\frac{x}{y}\right|^k$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $\left|\frac{x}{y}\right|<1$. (διότι $|x|<|y|$). Άρα, συγκλίνει

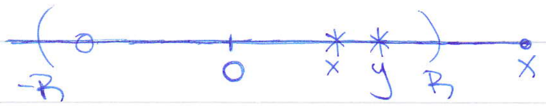
Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum |a_k x^k|$ συγκλίνει. $\Rightarrow \sum a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

(2.) Έστω ότι η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει. Αφού $|y|<|x|$ (από το (1) εναλλάσσοντας τους ρόλους των x και y). Έχουμε ότι η $\sum a_k y^k$ συγκλίνει απολύτως — άτοπο.

Το σύνολο σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Ορίζουμε $R = \sup\{\underbrace{|y| : \text{η } \sum a_k y^k \text{ συγκλίνει}}_{\text{μη κενό}}\}$

γιατί το 0 ανήκει σε αυτό. και $\subseteq [0,+\infty)$.



a.) Αν $x\in\mathbb{R}$ και $|x|<R \xRightarrow[\text{supremum}]{} \exists\, y\in\mathbb{R} : |x|<|y|<R$ και η $\sum a_k x^k$ να συγκλίνει.

Πρόταση 1 $\Rightarrow$ η $\sum |a_k x^k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_k x^k$ συγκλίνει.

Δηλ. το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\supseteq (-R,R)$.

(Σημ. Αν $R=+\infty$ έχουμε σύνολο σύγκλισης $=(-\infty,+\infty)$).

(β) Αν $x \in \mathbb{R}$ και $|x| > R$ τότε η $\sum a_k x^k$ αποκλίνει.
(αν συνέκλινε, από τον ορισμό του R θα είχαμε $|x| \leq R$).

Από εδώ $(-R, R) \subseteq$ Σύνολο σύγκλισης $\subseteq [-R, R]$.

$(-R,R)$ $[-R,R)$ $(-R,R]$ $[-R,R]$

Παραδείγματα:

(1.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (2.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$ (3.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

(1.) Κριτήριο λόγου: Παίρνω $x \neq 0$ / $b_k = \frac{x^k}{k!}$

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = |x| \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1$$

Άρα η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σύνολο σύγκλισης $= (-\infty, +\infty)$

(Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$)

(2.) $$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{\frac{x^{k+1}}{2^{k+1}}}{\frac{x^k}{2^k}} = |x| \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{|x|}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{|x|}{2}$$

- Αν $|x| < 2$ τότε $\lim \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{|x|}{2} < 1$. άρα η $\sum \frac{x^k}{2^k}$ συγκλίνει απολύτως.
- Αν $|x| > 2$ τότε αποκλίνει γιατί $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| \to \frac{|x|}{2} > 1$.

• $x=2$ η $\sum \frac{x^k}{2^k}$ γίνεται $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ - αποκλίνει

• $x=-2$ $\sum \frac{(-2)^k}{2^k} = \sum (-1)^k \cdot \frac{2^k}{2^k}$ αποκλίνει διότι $(-1)^k \not\to 0$.

Σύνολο σύγκλισης: $(-2,2)$

(3.) $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x| \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} |x|$.

Αν $|x|<1$ συγκλίνει
Αν $|x|>1$ αποκλίνει
$x=1$: η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει
$x=-1$: η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει (Leibniz)

— Σύνολο σύγκλισης $[-1,1)$.

(4.) $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x| \frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow{k\to\infty} |x|$

Αν $|x|<1$ συγκλίνει.
Αν $|x|>1$ αποκλίνει.
$x=1$: η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.
$x=-1$: η $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ συγκλίνει.

— Σύνολο σύγκλισης $[-1,1]$.

(5.) $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x| \frac{(k+1)!}{k!} = |x|(k+1) \xrightarrow{k\to\infty} +\infty > 1$ πάντα.

Άρα, η (5) συγκλίνει μόνο αν $x=0$.
Σύνολο σύγκλισης: $\{0\}$.

Ασκήσεις

(A.) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$$

Βασική υπενθύμιση

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^4}{e^{\sqrt{k}}} = 0.$$

$$\left(y=\sqrt{k} \;/\; \lim_{y\to\infty} \frac{y^8}{e^y} = 0\right)$$

Ανισότητα: $\forall\, y>0 \;\; \forall\, m\in\mathbb{N}$

$$e^y > \frac{y^m}{m!}$$

Για μεγάλα k ισχύει. $k^4 < e^{\sqrt{k}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{\sqrt{k}}} < \frac{1}{k^4} \Rightarrow \sum \frac{1}{e^{\sqrt{k}}}$$

και η $\sum \frac{1}{k^4}$ συγκλίνει

$\xrightarrow[\text{σύγκρισης}]{\text{κριτήριο}} \sum \frac{1}{e^{\sqrt{k}}}$ συγκλίνει.

Βασική υπενθύμιση

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{\sqrt{k}} = 0.$$

Για μεγάλα k, $\log k < \sqrt{k}$. (*)

(Θεωρώ την $\frac{\log y}{\sqrt{y}} \xrightarrow{y\to\infty} 0$)

$$\frac{(\log y)'}{(\sqrt{y})'} = \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = \frac{2\sqrt{y}}{y} = \frac{2}{\sqrt{y}} \to 0$$

(*) $\Rightarrow \frac{\log k}{k^2} < \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{3/2}}$ και η $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει. (p-σειρά με $p=\frac{3}{2}>1$).

Από κριτήριο σύγκρισης η $\sum \frac{\log k}{k^2}$ συγκλίνει.

Για την τρίτη, κριτήριο συμπύκνωσης / $\frac{1}{k(\log k)^2} \downarrow 0$

Άρα, η σειρά που κάνει ότι η
$$\sum_{k=7}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\log 2^k)^2} = \sum \frac{1}{(k\log 2)^2} = \frac{1}{(\log 2)^2} \sum \frac{1}{k^2}$$ συγκλίνει

Άσκηση 38

$a_k > 0$ και η $\sum a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

Αρχική ιδέα: $a_k^{\frac{k}{k+1}} = a_k \cdot \frac{1}{a_k^{\frac{1}{k+1}}}$ ⊛

Αν $a_k > \frac{1}{2^{k+1}} \Rightarrow a_k^{\frac{1}{k+1}} > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_k^{\frac{k}{k+1}} < 2a_k$.

Αν $a_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}$

$\Rightarrow a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{2^k}$

Σε κάθε περίπτωση, $a_k^{\frac{k}{k+1}} \leq \underbrace{2a_k + \frac{1}{2^k}}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$

Όμως, η $\sum \left(2a_k + \frac{1}{2^k}\right) = 2\sum a_k + \sum \frac{1}{2^k}$

συγκλίνει (γιατί αυτές συγκλίνουν και οι δυο).

Από κριτήριο σύγκρισης
η $\sum a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.