4/4/2012 10º μάθημα

Ερωτήσεις Κατανόησης

1.) Αν $a_n \to 0$ τότε η $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη

ΛΑΘΟΣ

Αν $a_k = \frac{1}{k}$ τότε $\frac{1}{k} \to 0$ αλλά $S_n \to +\infty$ (άρα δεν είναι φραγμένη)

Η αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει

2.) Αν η $S_n = a_1 + a_2 + a_n$ είναι φραγμένη τότε η a_k συγκλίνει

ΛΑΘΟΣ

$a_k = (-1)^{k-1}$ | $S_1 = a_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2 = 1 + (-1) = 0$

$a_{2k} = -1$ | $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0 + 1 = 1$, $a_4 = S_3 + a_4 = 1 + (-1) = 0$

$a_{2k-1} = 1$ | $S_5 = S_4 + a_5 = 0 + 1 = 1$.

$$S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Η (S_n) είναι φραγμένη και δεν συγκλίνει γιατί $S_{2n-1} = 1 \to 1$, $S_{2n} = 0 \to 0$

Η $\sum a_k$ αποκλίνει.

3.) Αν $|a_k| \to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

ΛΑΘΟΣ

$a_k = \frac{1}{k} \to 0$

$\parallel$

$|a_k|$ και η $\sum \frac{1}{k} = \sum |a_k|$ αποκλίνει

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως $\overset{op}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

4.) Αν η $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

<u>ΣΩΣΤΟ</u> (Υπενθ.: $|S_n-S_m|\le|t_n-t_m|<\varepsilon$)

Θεώρημα.

5.) Αν $a_k>0$ και $\forall k$ $0<\frac{a_{k+1}}{a_k}<1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

<u>ΛΑΘΟΣ</u>

$a_k=\frac{1}{k}$ Τότε $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}=\frac{k}{k+1}<1$ για κάθε k

αλλά η $\sum\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

6.) Αν $a_k>0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k}\to 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

6'.) Αν $a_k>0$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k}\to 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

<u>6.</u> $a_k=\frac{1}{k^2}$ / $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k^2}{(k+1)^2}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\to 1$ και η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ αποκλίνει.

<u>6'</u> $a_k=\frac{1}{k}$ / $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k}{k+1}\to 1$ αλλά η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Δε μπορούμε να αποφανθούμε.

<u>Κριτήριο λόγου</u> (D'Alembert)

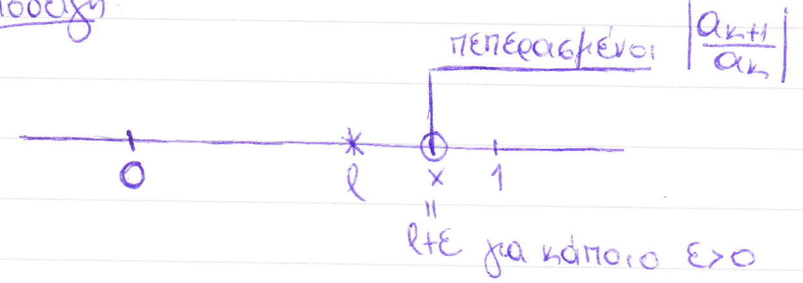
Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k\neq 0$ για κάθε k.

α.) Αν $\limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\ell<1$ τότε η $\sum|a_k|$ συγκλίνει.

β.) Αν $\limsup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\ell>1$ τότε η $\sum|a_k|$ αποκλίνει.

<u>Απόδειξη</u>

(α.)



Επιλέγουμε $x \in \mathbb{R}$ με $l < x < 1$

Από τον χαρακτηρισμό του limsup, αφού $x > l$, πεπερασμένοι το πλήθ

όροι της $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ είναι $> x$ $\Longrightarrow$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθ

$k \geq k_0$ $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq x$.

Τότε, $|a_{k_0+1}| \leq x|a_{k_0}|$

$$|a_{k_0+2}| \leq x|a_{k_0+1}| \leq x^2|a_{k_0}|$$

$$|a_{k_0+3}| \leq x|a_{k_0+2}| \leq x^3|a_{k_0}|$$

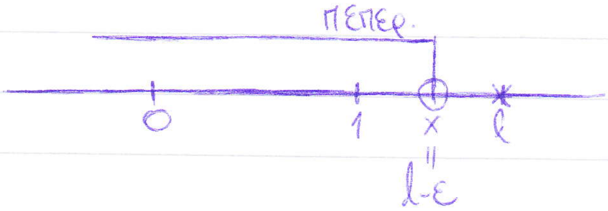
$$\vdots$$

$\forall\, k > k_0$ $\quad |a_k| \leq x^{k-k_0}|a_{k_0}| = \left(\frac{|a_{k_0}|}{x^{k_0}}\right) x^k = Mx^k$ όπου $M = \frac{|a_{k_0}|}{x^{k_0}}$

Ξέρουμε ότι η $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} x^k$ συγκλίνει (γεωμ. σειρά με λόγο $x<1$).

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

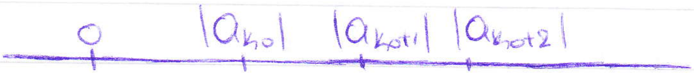
(b.)



Παίρνουμε $x \in \mathbb{R}$ με $1 < x < l$.

Από τον χαρακτηρισμό του liminf $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall\, k \geq k_0$ $\quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq x > 1 \Rightarrow \forall\, k \geq k_0\ |a_{k+1}| > |a_k|$



$\forall\, k \geq k_0$ $\quad |a_k| \geq |a_{k_0}| \Rightarrow |a_k| \not\to 0$

$\Rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

Κριτήριο της ρίζας (Cauchy)

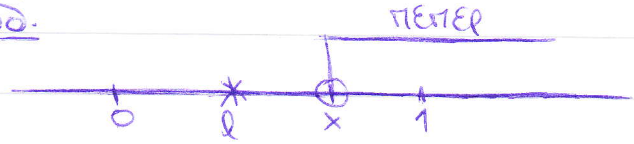
Έστω (a_k) ακολουθία.

(α.) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1$ τότε η $\sum |a_k|$ συγκλίνει

(β.) Αν $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = l > 1$ τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει.

Αποδ.

(α.)



Παίρνουμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε $l < x < 1$.

Αφού $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = l < x$ (από χαρακτηρισμό του limsup)

υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall\, k \geq k_0$ $\sqrt[k]{|a_k|} \leq x$

$\Rightarrow \forall\, k \geq k_0$ $|a_k| \leq x^k$ και η $\sum x^k$ συγκλίνει (γιατί $x < 1$)

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

(β.)

Παίρνουμε $x \in \mathbb{R}$: $1 < x < l$

Αφού $x < l = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$ υπάρχουν άπειροι $k \in \mathbb{N}$: $x < \sqrt[k]{|a_k|}$

Για κάθε τέτοιον k, έχουμε $|a_k| > x^k > 1$.

Τότε $|a_k| \not\to 0$ (αλλιώς, όλοι τελικά οι $|a_k|$ θα ήταν < 1).

$\Downarrow$

$a_k \not\to 0$

$\Downarrow$

η $\sum a_k$ αποκλίνει.

Ασκήσεις

22.) α.) $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ γ.) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ δ.) $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1)^k$

$$a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

Θα συγκρίνουμε με την $b_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{k+1}{k}}+1}\longrightarrow\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>0$$

Άρα, η $\sum a_k$ συμπεριφέρεται σαν την

$\sum b_k=\sum\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum\frac{1}{k^{1/2}}$ $(p=\frac{1}{2}<1)$

η οποία αποκλίνει.

γ.) $a_k=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}=\frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$ ⟶ βαθμός 3/2

Συγκρίνω με την $b_k=\frac{1}{k^{3/2}}$

$$\frac{a_k}{b_k}=\frac{k^{3/2}}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\longrightarrow\frac{1}{2}>0.$$

Άρα, η $\sum a_k$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum b_k=\sum\frac{1}{k^{3/2}}$ $(p=\frac{3}{2}>1)$

⟶ η οποία συγκλίνει.

δ.) $0\le a_k=(\sqrt[k]{k}-1)^k$

Κριτήριο ρίζας $\sqrt[k]{a_k}=\left[(\sqrt[k]{k}-1)^k\right]^{1/k}=(\sqrt[k]{k}-1)^{\cancel{k}\cdot 1/\cancel{k}}$

Εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim(\sqrt[k]{k}-1)=1-1=\underset{\ell}{0}<1.$

Άρα, η $\sum a_k=\sum(\sqrt[k]{k}-1)^k$ συγκλίνει.

23) (β.) $\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\sqrt[\kappa]{\kappa}-1)$, (γ.) $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{συν^2\kappa}{\kappa^2}$, (δ.) $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\kappa!}{\kappa^\kappa}$

δ.) Κριτήριο λόγου : $\frac{a_{\kappa+1}}{a_\kappa}=\frac{\frac{(\kappa+1)!}{(\kappa+1)^{\kappa+1}}}{\frac{\kappa!}{\kappa^\kappa}}=\frac{\kappa^\kappa(\kappa+1)!}{(\kappa+1)^{\kappa+1}\kappa!}=\frac{\kappa^\kappa\cdot\kappa!\cancel{(\kappa+1)}}{(\kappa+1)^\kappa\cancel{(\kappa+1)}\cancel{\kappa!}}=$

$$=\frac{1}{\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^\kappa}=\frac{1}{(\kappa+\frac{1}{\kappa})^\kappa}\longrightarrow\frac{1}{e}\leq 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

(γ.) $\underbrace{0\leq\frac{συν^2\kappa}{\kappa^2}}_{|a_\kappa|}\leq\frac{1}{\kappa^2}$

$|a_\kappa|\leq M\cdot b_\kappa$, $M=1$

Αφού η $\sum\frac{1}{\kappa^2}$ συγκλίνει, από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\frac{συν^2\kappa}{\kappa^2}$ συγκλίνει.

<u>Παραλλαγή.</u> $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{συν(\kappa!)}{\kappa^2}$

$\left|\frac{συν(\kappa!)}{\kappa^2}\right|\leq\frac{1}{\kappa^2}$ και η $\sum\frac{1}{\kappa^2}$ συγκλίνει. $|συνx|\leq 1$

$\Downarrow$

$\sum\frac{συν(\kappa!)}{\kappa^2}$ συγκλίνει και μάλιστα απολύτως.

(β.) Έχουμε $a_\kappa=\sqrt[\kappa]{\kappa}-1\rightarrow 0$.

Ξέρουμε ότι $(1+\frac{1}{\kappa})^\kappa<e<\kappa$ για κάθε $\kappa\geq 3$

$\Rightarrow 1+\frac{1}{\kappa}<\sqrt[\kappa]{\kappa}$ για κάθε $\kappa\geq 3$.

$\Rightarrow \sqrt[\kappa]{\kappa}-1>\frac{1}{\kappa}>0$ για κάθε $\kappa\geq 3$.

Αν η $\sum_{\kappa=3}^{\infty}(\sqrt[\kappa]{\kappa}-1)$ συνέκλινε τότε από κριτήριο σύγκλισης θα συνέκλινε και η $\sum_{\kappa=3}^{\infty}\frac{1}{\kappa}$ άτοπο (αρμονική)

Άρα $\sum_{\kappa=3}^{\infty}(\sqrt[\kappa]{\kappa}-1)$ αποκλίνει $\Rightarrow\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\sqrt[\kappa]{\kappa}-1)$ αποκλίνει.

24) (α.) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ Εφαρμόζω το κριτήριο ρίζας:

$$\sqrt[k]{a_k}=\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}\right]^{\frac{1}{k}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2\cdot\frac{1}{k}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\to\frac{1}{e}<1.$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

(β.) $\sum_{k=1}^{\infty}p^k k^p \quad (p>0)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot k^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot k^{1/3}$$

Κριτήριο λόγου: $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{p^{k+1}(k+1)^p}{p^k\ k^p}=$

$$=p\left(1+\frac{1}{k}\right)^{p}\to p\cdot 1^p = p$$

ο εκθέτης σταθερός

• Αν $p<1$ τότε $\lim\frac{a_{k+1}}{a_k}=p<1\Rightarrow$ η $\sum a_k$ συγκλίνει.

• Αν $p>1$ τότε $\lim\frac{a_{k+1}}{a_k}=p>1\Rightarrow$ η $\sum a_k$ αποκλίνει.

• Για $p=1$ εξετάζουμε χωριστά:
Έχουμε την $\sum_{k=1}^{\infty}1^k\cdot k^1=\sum_{k=1}^{\infty}k$ η οποία αποκλίνει γιατί $k\not\to 0$ όταν $k\to\infty$.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>: ΝΑΙ όταν $0<p<1$
ΟΧΙ όταν αν $p\geq 1$.

33.) Έχουμε $a_k\geq 0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=+\infty$
Δείξτε ότι $\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}}_{b_k}=1.$

$$b_1=\frac{a_1}{1+a_1}=\frac{1+a_1-1}{1+a_1}=1-\frac{1}{1+a_1}$$

$$b_2=\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}=\frac{(1+a_2)-1}{(1+a_1)(1+a_2)}=\frac{1+a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$$

$\vdots$

$$b_k=\frac{a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_k)}=\frac{1+a_k}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_k)}-\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{k-1})(1+a_k)}$$

Άρα $b_1+b_2+b_3+\dots+b_{n-2}+b_{n-1}+b_n =$

$$= \left(1-\frac{1}{1+a_1}\right)+\left(\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\right)+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}\right)$$

$$+\dots+\left(\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_{k-2})}-\frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_{k-1})}\right)$$

$$\dots \quad +\left(\frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_{k-1})}-\frac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$$

Πρέπει νδό $\dfrac{1}{(1+a_1)\dots(1+a_n)} \to 0 \iff (1+a_1)\dots(1+a_n) \to +\infty$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $(1+a_1)\dots(1+a_n) \geq a_1+a_2+\dots+a_n \to +\infty$.

γιατί η Σa_n

αποκλίνει στο $+\infty$.