23/3/2012 6ο μάθημα.

Υπακολουθίες - Ασκήσεις

14] Έστω (a_n) μια ακολουθία και έστω (x_k) ακολουθία οριακών σημείων της (a_n). Αν η (x_k) συγκλίνει στο $x\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι το x είναι οριακό σημείο της (a_n)

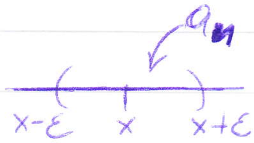
Αποδ.

Υπενθύμιση: Το $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο της (a_n) $\overset{\text{ορ}}{\iff}$ $\exists$ (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n}\to\lambda$.

Πρόταση: Έστω (a_n) και $x\in\mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα

α) Το x είναι οριακό σημείο της (a_n).

β) $\forall \varepsilon>0$ $\forall m\in\mathbb{N}$ $\exists$ $n\geq m$ ώστε $|a_n - x|<\varepsilon$.



$x_k \to x$ Ιδέα a_n

Θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό. Έστω $\varepsilon>0$ και $m\in\mathbb{N}$

Εφόσον, $x_k\to x$ (για τυχόν $\varepsilon>0$).

υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ ώστε $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Επειδή το x_k είναι οριακό σημείο της (a_n), υπάρχει $n\in\mathbb{N}$, $n\geq m$ ώστε $|a_n - x_k|<\frac{\varepsilon}{2}$

Από την τριγωνική ανισότητα

$$|a_n - x| \leq |a_n - x_k| + |x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Άρα, από τη Πρόταση, το x είναι οριακό σημείο της (a_n).

18] Να βρείτε τα limsup, liminf της $b_n=\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{1}{n+1}$

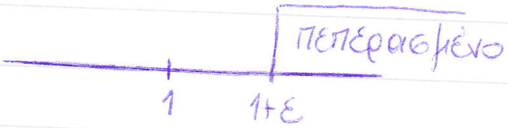
Αποδ: Για το $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

$$b_{6n}=\cos(2n\pi)+\frac{1}{6n+1} = 1+\frac{1}{6n+1}$$

$$b_{6n+1} = \cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{6n+2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6n+2}$$

$b_{n+2} = \dots = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6n+3}$

Ισχυρισμός: $\limsup b_n = 1$



Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

Τότε, $b_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n+1} < 1+\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$

Άρα, $\limsup b_n \leq 1$

υπάρχει και υπακολουθία που πάει στο 1

Επομένως $\limsup b_n = 1$.

19) Έστω $(a_n), (b_n)$ φραγμένες. Τότε,

$$\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n+b_n) \leq \limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

Απόδειξη.

Έστω $\liminf a_n = a$, $\liminf b_n = b$ κι $\liminf(\underbrace{a_n+b_n}_{= s_n}) = s$

α) Με υπακολουθίες.

Υπάρχει (s_{k_n}) υπακολουθία της (s_n) με $s_{k_n} \to s$.

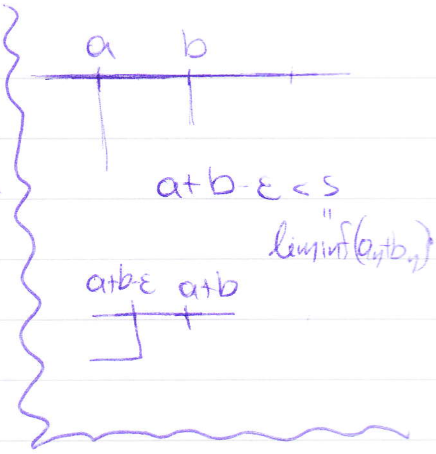
"Κοιτάμε" την (a_{k_n}). Από Bolzano-Weierstrass υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $(a_{k_{\lambda_n}})$ της (a_n) ώστε $a_{k_{\lambda_n}} \to x \in \mathbb{R}$.

Επίσης, $\underbrace{s_{k_{\lambda_n}}}_{= a_{k_{\lambda_n}} + b_{k_{\lambda_n}}} \to s$.

Επιπλέον, η $(b_{k_{\lambda_n}})$ συγκλίνει στο $s-x$. Εξ' ορισμού, $x \geq \liminf a_n$

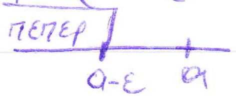
Όμοια, $s-x \geq \liminf b_n \Rightarrow \underbrace{s}_{= \liminf(a_n+b_n)} \geq \liminf b_n + x \geq \liminf a_n + \liminf b_n$

(b) Τον ε-χαρακτηρισμό:



<u>Υπενθύμιση</u>: Αν $t-\varepsilon<s$ για κάθε $\varepsilon>0$, τότε $t\le s$.

Έστω $\varepsilon>0$. Το a είναι το μικρότερο οριακό σημείο της (a_n)



Δηλ. $\exists\ n_1\in\mathbb{N}$ ώστε

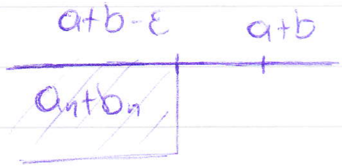
$a_n > a-\frac{\varepsilon}{2}\ \forall n\ge n_1$ (1)

Όμοια, υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $b_n > b-\frac{\varepsilon}{2}\ \forall n\ge n_2$ (2).
Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Τότε για κάθε $n\ge n_0$ ισχύουν οι (1), (2) ταυτόχρονα. Αν $n\ge n_0$

$$\left.\begin{aligned} a_n &> a-\tfrac{\varepsilon}{2}\\ b_n &> b-\tfrac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n+b_n > a+b-\varepsilon$$

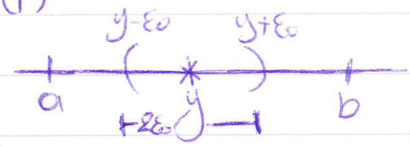
Δηλ. το σύνολο $\{n : a_n+b_n < a+b-\varepsilon\}$ είναι το πολύ πεπερασμένο.
Άρα, $a+b-\varepsilon \le \liminf(a_n+b_n)$
Καθώς το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$a+b\le \liminf(a_n+b_n)$$



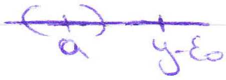
<u>30</u> Έστω (x_n) ακολουθία με $x_{n+1}-x_n\to 0$ και έστω $a<b$ δυο οριακά της σημεία. Δείξτε ότι αν $y\in[a,b]$, τότε το y είναι οριακό σημείο της (Baroni).

<u>Απόδειξη</u> (Με άτοπο)
Έστω ότι $\exists\ y\in(a,b)$ το οποίο δεν είναι οριακό σημείο της (x_n).
Τότε, υπάρχει $\varepsilon_0>0$, υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\ge n_1$
$|x_n-y|\ge\varepsilon_0$ δηλ. $x_n\notin(y-\varepsilon_0, y+\varepsilon_0)$ (1)

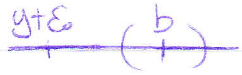


Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\varepsilon_0>0$ είναι τέτοιο ώστε $a<y-\varepsilon_0<y+\varepsilon_0<b$. Από την $x_{n+1}-x_n\to 0$, υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$: $\forall\ n\ge n_2$ $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon_0$ (2).
Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$. Για κάθε $n\ge n_0$ ισχύουν ταυτόχρονα (1) και (2).

Καθώς το a είναι οριακό και $a < y - \varepsilon_0$ υπάρχει $s \in \mathbb{N}$, $s \geq n_0$ ώστε $x_s < y - \varepsilon_0$



Όμοια, υπάρχει $m > s$ ώστε $x_m > y + \varepsilon_0$



26/3/2012 7^{o} μάθημα

Κεφ. ΙΙ: Σειρές πραγματικών αριθμών

Το πρόβλημα: Μας δίνουν μια ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{R}$ και θέλουμε να ορίσουμε και να βρούμε, αν υπάρχει, το "άθροισμά τους".

Αν έχαμε πεπερασμένο το πλήθος αριθμούς πχ. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ τότε

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 \underset{\text{ορ.}}{=} (((((a_1+a_2)+a_3)+a_4)+a_5)+a_6)$$
$$= (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)$$
$$= (a_2+a_6)+(a_4+a_1)+(a_5+a_3)$$

Το αποτέλεσμα δεν αλλάζει αν αλλάξει η σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις ή η διάταξη των προσθετέων.

Ορισμός: Έστω (a_n) ακολουθία πραγμ. αριθμών

Ορίζουμε $S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ καθώς το $n \to \infty$ και είναι ίσο με s $(s \in \mathbb{R})$ τότε "s είναι το άθροισμά της a_n" και γράφαμε $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Αν αλλάξω τη σειρά των προσθετέων θα προκύψει "άλλη S_n" που μπορεί να συγκλίνει σε $S' \neq S$ ή να μη συγκλίνει.

Παραδείγματα: i.) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Εδώ $a_k = \frac{1}{2^k}$

$$S_1 = \frac{1}{2}$$
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$
$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{x}^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Ξέρουμε ότι αν $x \neq 1$ τότε $1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$

Είδαμε ότι $S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \to 1 - 0 = 1$

Άρα, συμφωνούμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

ii.) Να βρεθεί το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Εδώ $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{S_n} + \dots$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Τότε $S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 - 0 = 1$

iii) Να βρεθεί, αν υπάρχει, το $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Εδώ $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$

Δεν μπορούμε να δώσουμε "απλό τύπο" για το S_n μπορούμε όμως
α) να δείξουμε ότι υπάρχει το $s = \lim_{n\to\infty} S_n$
β) να δείξουμε ότι $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$
(με μεθόδους Μιγ. Ανάλυσης ή Ανάλυσης Fourier)

Αυστηρός ορισμός (σειρά - άθροισμα σειράς)
Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

1) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η ακολουθία (S_n).

2. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν υπάρχει το $s = \lim_{n\to\infty} S_n$ και ο s είναι πραγματικός αριθμός.

Τότε, γράφουμε $\boxed{s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$ και λέμε ότι ο s είναι το άθροισμα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Ξανά στο παράδειγμα (iii)
Έχουμε $a_k = \frac{1}{k^2} > 0$ για κάθε k, ~~άρα $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$~~

άρα $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = S_n$

Άρα η (S_n) είναι γνησίως αύξουσα. Αν δείξουμε ότι η (S_n) είναι άνω φραγμένη, τότε ξέρουμε ότι συγκλίνει σε κάποιον $s \in \mathbb{R}$.
Και τότε, $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Άνω φράγμα για το S_n

$$S_n = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n-1)} + \frac{1}{n\cdot n}$$

$$< 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-2)} + \frac{1}{(n-1)(n-1)}$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Έχουμε $(S_n) \uparrow$ και $S_n < 2$ $\forall n$. Άρα, $S_n \xrightarrow{n\to\infty} S \le 2$

Δηλαδή $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le 2$

Τι είδαμε: Δίνεται η ακολουθία (a_n) στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία (S_n) με $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αν $S_n \to s \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον s, γράφουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και ο s είναι το άθροισμα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Πρόταση 1: Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Απόδειξη: πρώτος τρόπος Το ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει σημαίνει ότι υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$

Ορίζουμε δεύτερη ακολουθία (t_n) με:

$t_1 = 0$	S_1
$t_2 = S_1$	S_2
$t_3 = S_2$	S_3
$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
$t_n = S_{n-1}$	S_n

Έχουμε $S_n \to s$ και $t_n = S_{n-1} \to s$

Άρα, $S_n - t_n \to s - s = 0$.

Άρα, $a_n \to 0$

Συνήθως θα δείτε το εξής: Αφού $S_n \to S$ έχουμε και $S_{n-1} \to S$.
Τότε, $S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$. Όμως $a_n = S_n - S_{n-1}$
Άρα, $a_n \to 0$.

Δεύτερος τρόπος

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $|a_n| < \varepsilon$.
Αφού $S_n \to S$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall m \geq n_1$ $|S_m - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)
Ορίζουμε $n_0 = n_1 + 1$. Έστω $n \geq n_0$
Τότε $n > n_1$ και $n - 1 \geq n_1$. Έρχομαι στην (*) και μπορώ να βάλω
$m = n$ ή $m = n-1$. Έχω $|S_n - S| < \varepsilon/2$ και $|S_{n-1} - S| < \varepsilon/2$
$\Downarrow$
$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq |S_n - S| + |S - S_{n-1}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Σημείωση: Η Πρόταση 1 χρησιμοποιείται σαν κριτήριο απόκλισης σειρών: αν $a_n \not\to 0$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν μπορεί να συγκλίνει.

πχ. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k+3}$

$a_k = \frac{k+1}{2k+3} \to \frac{1}{2} \neq 0$.
Άρα η σειρά αποκλίνει.

(!) ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ: υπάρχουν ακολουθίες (a_k) (με θετικούς όρους) ώστε $a_k \to 0$ αλλά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

Παράδειγμα: Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$.

- Έχουμε $a_k = \frac{1}{k} \to 0$.
- Όμως $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty$

Ξέρουμε ότι η (S_n) είναι γνησίως αύξουσα $\left(S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0\right)$
Θα δείξουμε ότι η (S_n) δεν είναι άνω φραγμένη
Τότε, $S_n \to +\infty$.

$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = S_2 + \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}^{2} \geq S_2 + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}^{1/2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$S_{8 (2^3)} = S_4 + \overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}^{4} \geq S_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} \geq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{16 (2^4)} = S_8 + \overbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}^{8}$

$\geq S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} \geq 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι $\boxed{S_{2^n} = 1 + n \frac{1}{2} \quad , n \in \mathbb{N}}$

Αν η (S_n) ήταν άνω φραγμένη, θα υπήρχε $M > 0$ ώστε $S_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

$\Downarrow$

$1 + \frac{n}{2} \leq S_{2^n} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$\Downarrow$

$n \leq 2(M-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΤΟΠΟ γιατί το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k \geq 0$. Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει <u>αν και μόνο αν</u> η (S_n) είναι φραγμένη (δηλ. αν $\exists\, M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \ a_1 + \dots + a_n \leq M$).

<u>Απόδειξη</u>: $(\Rightarrow)$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\overset{\text{ορσ}}{\Rightarrow}$ η (S_n) συγκλίνει σε κάποιον $s \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ (S_n) φραγμένη.

$(\Leftarrow)$ Αφού $a_k \geq 0$ έχουμε $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0 \ \ \forall n$

Δηλ. η (S_n) είναι αύξουσα. Από την υπόθεση είναι και φραγμένη

Από βασικό Θεώρημα Απ. Λογ. I $\exists\, s \in \mathbb{R} : S_n \to s$

$\overset{\text{ορσ}}{\Rightarrow}$ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$