

4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

4.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα

Στην παράγραφο αυτή, μια συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ θα ονομάζεται **διαφορίσιμη στο $[a, b]$** αν η $F'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$F'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} \quad \text{και} \quad F'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b}.$$

Γράφουμε για συντομία $F'(a) = F'_+(a)$ και $F'(b) = F'_-(b)$.

Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη και σε κάθε υποδιάστημα $[a, x]$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμά της ως συνάρτηση του άνω άκρου ολοκλήρωσης:

Ορισμός 4.1 Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Το **αόριστο ολοκλήρωμα της f** είναι η συνάρτηση

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ F(x) = \int_a^x f.$$

Τονίζουμε ότι ενώ το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ είναι αριθμός, το αόριστο ολοκλήρωμα είναι συνάρτηση στο $[a, b]$.

Παρατήρηση 4.1 Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη και $x, y \in [a, b]$. Αν $x \leq y$, από το Πρόγραμμα 5.16 έχουμε¹

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \|f\| (y - x) = \|f\| |y - x|$$

(όπου $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$). Αν πάλι $x > y$, εξ ορισμού έχουμε $\int_x^y f = -\int_y^x f$, άρα και πάλι

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \int_y^x f \right| = \left| \int_x^y f \right| \leq \|f\| (x - y) = \|f\| |y - x|.$$

¹εφόσον $\sup\{|f(t)| : t \in [x, y]\} \leq \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι, όταν η f είναι ολοκληρώσιμη, το αόριστο ολοκλήρωμά της, F , είναι (ομοιόμορφα) συνεχής στο $[a, b]$. Όταν όμως η f είναι συνεχής, η F είναι όχι μόνον συνεχής, αλλά παραγωγίσιμη:

Θεώρημα 4.2 Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, με παράγωγο ίση με τη συνάρτηση.

Γενικότερα:

Εστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη και $F(x) = \int_a^x f$. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in [a, b]$, τότε η F είναι διαφορίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$. Επομένως αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η F είναι διαφορίσιμη στο $[a, b]$ και $F'(x) = f(x)$.

Απόδειξη Για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε (εφόσον $x - x_0 = \int_{x_0}^x 1 dt$)

$$F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \int_{x_0}^x dt = \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in [a, b]$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Συνεπώς για κάθε t μεταξύ x_0 και x έχουμε $|t - x_0| < \delta$ και άρα $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επομένως, από το Πρόγραμμα 5.16,

$$\left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \varepsilon |x - x_0|.$$

Έπεται ότι αν $x \in [a, b]$ και $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \varepsilon |x - x_0| = \varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, αν $x_0 \in (a, b)$ η (1) δείχνει ότι το όριο

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και ισούται με $f(x_0)$.

Στην περίπτωση $x_0 = a$, επειδή $x \in [a, b]$, έχουμε $x > x_0 = a$ και άρα η (1) δείχνει ότι το πλευρικό όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

με άλλα λόγια ότι $F'_+(x_o) = f(x_o)$. Ομοίως, όταν $x_o = b$, τότε $F'_-(x_o) = f(x_o)$.
□

Από το Θεώρημα 4.2 έπεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ είναι η παράγωγος κάποιας συνάρτησης.

Ορισμός 4.2 Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. **Παράγουσα ή αντιπαράγωγος** της f λέγεται κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $H' = f$.

Μία παράγουσα της f είναι το αόριστο ολοκλήρωμα. Ποιές άλλες συναρτήσεις έχουν αυτήν την ιδιότητα;

Πόρισμα 4.3 Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

Μια συνάρτηση $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f αν και μόνον αν η G είναι διαφορίσιμη και υπάρχει μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $G(x) = \int_a^x f + c$.

Απόδειξη Αν $G(x) = \int_a^x f + c$, τότε από το Θεώρημα 4.2 η G είναι διαφορίσιμη και $G' = f$.

Αν η G είναι διαφορίσιμη και $G' = f$, τότε θέτοντας

$$F(x) \equiv \int_a^x f$$

έχουμε ότι η F' υπάρχει στο $[a, b]$ και $F'(x) = f(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$ άρα η συνάρτηση $G - F$, αφού έχει παράγωγο ίση με μηδέν στο $[a, b]$, είναι σταθερή.

Παρατήρηση 4.4 Αν η f δεν είναι συνεχής στο $[a, b]$, δεν υπάρχει πάντα διαφορίσιμη συνάρτηση $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $H' = f$. Ένα παράδειγμα είναι η $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, θα ήταν συνεχής, άρα θα ελάμβανε ελάχιστη τιμή, δηλ. θα υπήρχε $\xi \in [a, b]$ με $H(\xi) = \min\{H(t) : t \in [0, 1]\}$. Εφόσον $H'(0) = f(0) = -1 < 0$, η τιμή $H(0)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστη². Εφόσον $H'(1) = f(1) = 1$, ούτε η τιμή $H(1)$ μπορεί να είναι ελάχιστη³. Αυτό σημαίνει ότι $0 \neq \xi \neq 1$, άρα $\xi \in (0, 1)$. Από το Θεώρημα του Fermat έπεται τώρα ότι $f(\xi) = H'(\xi) = 0$, άτοπο.

²γιατί υπάρχει $x > 0$ ώστε $\frac{H(x)-H(0)}{x-0} < -\frac{1}{2}$

³γιατί υπάρχει $x < 1$ ώστε $\frac{H(x)-H(1)}{x-1} > \frac{1}{2}$

Παρατήρηση 4.5 Από το Θεώρημα 4.2 έπεται ότι, αν F είναι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, τότε $\int_a^b F' = F(b) - F(a)$ (εφόσον $F(a) = 0$).

• Γενικότερα, αν $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση (δηλαδή η G' υπάρχει και είναι συνεχής) τότε ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a). \quad (2)$$

Απόδειξη Η G είναι μια παράγουσα της G' , άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $G(x) = \int_a^x G'(t)dt + c$. Θέτοντας $x = a$ βρίσκουμε $c = G(a)$, και συνεπώς

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a). \quad \square$$

• Δεν είναι όμως εν γένει αλήθεια ότι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση (2).

Μπορεί παραδείγματος χάριν η παράγωγος να μην είναι ολοκληρώσιμη: Αν

$$G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

τότε η G' υπάρχει στο $[0, 1]$ και εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$G'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Αλλά η G' δεν είναι φραγμένη στο $[0, 1]$ και άρα δεν είναι ολοκληρώσιμη.

• Μένει να εξετασθεί η περίπτωση που η G' είναι απλώς ολοκληρώσιμη (και όχι κατ'ανάγκην συνεχής).

Είναι αξιοσημείωτο ότι και πάλι ισχύει η σχέση (2). Η απόδειξη όμως στην περίπτωση αυτή είναι τελείως διαφορετική, καθώς δεν μπορούμε να επικαλεσθούμε το Θεώρημα 4.2.

Θεώρημα 4.6 Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού Έστω $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη. Αν η G' είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b G' = G(b) - G(a).$$

Απόδειξη Έστω $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ μια τυχαία διαμέριση του $[a, b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε $[t_{i-1}, t_i]$, βρίσκουμε $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ώστε

$$G(t_i) - G(t_{i-1}) = G'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Εφόσον $m_i(G') \leq G'(\xi_i) \leq M_i(G')$ έχουμε (με τους συμβολισμούς του Κεφαλαίου 5)

$$L(G', \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^n G'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \leq U(G', \mathcal{P}).$$

Αλλά

$$\sum_{i=1}^n G'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (G(t_i) - G(t_{i-1})) = G(b) - G(a)$$

άρα

$$L(G', \mathcal{P}) \leq G(b) - G(a) \leq U(G', \mathcal{P}).$$

Όμως (αφού η G' είναι ολοκληρώσιμη) το $\int_a^b G'$ είναι ο μοναδικός αριθμός που ικανοποιεί την ανισότητα αυτή για κάθε \mathcal{P} , επομένως $\int_a^b G' = G(b) - G(a)$. \square

Παρατήρηση 4.7 Η μέθοδος απόδειξης του Θεωρήματος 4.2 μπορεί να δώσει και μια απόδειξη του θεωρήματος ότι

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη χωρίς να χρησιμοποιηθεί η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας.

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι φραγμένη (αφού είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα). Συνεπώς σε κάθε $[a, x]$ τα κάτω και άνω ολοκληρώματα υπάρχουν. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $A, K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$K(x) = \int_a^x f, \quad A(x) = \overline{\int_a^x f}$$

(εξ ορισμού $A(a) = K(a) = 0$). Φυσικά έχουμε $K(x) \leq A(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι K', A' υπάρχουν και είναι ίσες στο διάστημα (a, b) . Γιατί τότε οι K και A θα πρέπει να διαφέρουν κατά σταθερά, και άρα $K(b) - K(a) = A(b) - A(a)$, δηλαδή $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$.

Σταθεροποιούμε ένα $x_o \in (a, b)$ και έστω $x_o < x < b$. Τότε

$$\int_a^{x_o} f + \int_{x_o}^x f = \int_a^x f \implies K(x_o) + \int_{x_o}^x f = K(x)$$

και ομοίως

$$A(x_o) + \int_{x_o}^x f = A(x)$$

[Η απόδειξη της προσθετικότητας του άνω και κάτω ολοκληρώματος αφήνεται ως (απλή) άσκηση για τον αναγνώστη]. Έχουμε λοιπόν

$$K(x) - K(x_o) = \int_{x_o}^x f \leq \int_{x_o}^x f = A(x) - A(x_o).$$

Αλλά

$$\int_{x_o}^x f \geq m_x(x - x_o)$$

όπου $m_x = \inf\{f(t) : t \in I_x\}$ (με I_x συμβολίζουμε το κλειστό διάστημα με άκρα x και x_o)⁴. Ομοίως

$$\int_{x_o}^x f \leq M_x(x - x_o)$$

όπου $M_x = \sup\{f(t) : t \in I_x\}$. Έχουμε λοιπόν

$$m_x(x - x_o) \leq K(x) - K(x_o) \leq A(x) - A(x_o) \leq M_x(x - x_o).$$

Στην περίπτωση $a < x < x_o$, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε

$$m_x(x_o - x) \leq \int_x^{x_o} f = K(x_o) - K(x) \leq A(x_o) - A(x) \leq M_x(x_o - x)$$

άρα και στις δυο περιπτώσεις, αν $x \neq x_o$, έχουμε

$$m_x \leq \frac{K(x) - K(x_o)}{x - x_o} \leq \frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o} \leq M_x.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη συνέχεια της f στο x_o : Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x \in (a, b)$ και $|x - x_o| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$. Αν $t \in I_x$ τότε $|t - x_o| < \delta$, άρα

$$f(x_o) - \varepsilon < f(t) < f(x_o) + \varepsilon \quad \text{για κάθε } t \in I_x$$

⁴Πράγματι αν θεωρήσουμε την διαμέριση $\mathcal{P} = \{x_o, x\}$ του $[x_o, x]$ έχουμε $\int_{x_o}^x f \geq L(f, \mathcal{P}) = m_x(x - x_o)$.

και συνεπώς

$$f(x_o) - \varepsilon \leq \inf\{f(t) : t \in I_x\} \\ \sup\{f(t) : t \in I_x\} \leq f(x_o) + \varepsilon.$$

Επομένως αν $0 < |x - x_o| < \delta$ έχουμε

$$f(x_o) - \varepsilon \leq m_x \leq M_x \leq f(x_o) + \varepsilon$$

και άρα

$$f(x_o) - \varepsilon \leq m_x \leq \frac{K(x) - K(x_o)}{x - x_o} \leq \frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o} \leq M_x \leq f(x_o) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{K(x) - K(x_o)}{x - x_o}$ και $\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o}$ υπάρχουν και είναι ίσα (με $f(x_o)$). Άρα οι A και K είναι (συνεχείς στο $[a, b]$ και) διαφορίσιμες στο (a, b) με $K'(x) = A'(x)$. Επομένως διαφέρουν κατά σταθερά.

4.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

$$\text{Συμβολισμός : } [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

Θεώρημα 4.8 (Ολοκλήρωση κατά μέρη) Αν $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και οι f', g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε

- $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$
- υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\int fg' = fg - \int f'g + c$.

Απόδειξη Η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη και

$$(fg)' = fg' + f'g \implies fg' = (fg)' - f'g.$$

Από το Θεώρημα 4.6 έπεται ότι οι συναρτήσεις $\int f'g$ και $\int (fg)' - \int f'g$ έχουν ίσες παραγώγους, άρα η διαφορά τους είναι σταθερή.

Παράδειγμα 4.9

$$\int x \cos x dx = \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int (x)' \sin x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

Θεώρημα 4.10 (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης) Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη με ϕ' ολοκληρώσιμη και έστω $I = \phi([a, b])$. Αν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\begin{aligned} & \bullet \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b (f \circ \phi)\phi' \\ & \bullet \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)ds. \end{aligned}$$

Απόδειξη Το I είναι κλειστό διάστημα γιατί η ϕ είναι συνεχής. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο I , αφού είναι συνεχής. Ορίζουμε

$$F : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad F(x) = \int_{\phi(a)}^x f$$

(το $\phi(a)$ δεν είναι κατ' ανάγκη άκρο του διαστήματος I). Αφού η f είναι συνεχής, από το Θεώρημα 4.2 η F είναι διαφορίσιμη στο I και $F' = f$. Συνεπώς $(f \circ \phi)\phi' = (F' \circ \phi)\phi'$ και άρα

$$\int_a^b (f \circ \phi)\phi' = \int_a^b (F' \circ \phi)\phi'.$$

Όμως η $F \circ \phi$ είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της $(F \circ \phi)' = (F' \circ \phi)\phi'$ (κανόνας αλυσίδας) είναι ολοκληρώσιμη, γιατί η $F' \circ \phi$ είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη, και η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς από το Θεώρημα 4.6

$$\int_a^b (F' \circ \phi)\phi' = \int_a^b (F \circ \phi)' = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f - \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f.$$

Παράδειγμα 4.11

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 (x+1)^{-1/2} dx = \int_1^2 (x+1)^{-1/2} (x+1)' dx$$

Εδώ αν θέσουμε $y = \phi(x) = x + 1$ και $f(y) = y^{-1/2}$ έχουμε

$$\int_1^2 (x+1)^{-1/2} (x+1)' dx = \int_1^2 f(\phi(x))\phi'(x) dx$$

άρα

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \int_{\phi(1)}^{\phi(2)} f(y) dy = \int_2^3 y^{-1/2} dy = \left[\frac{y^{1/2}}{1/2} \right]_2^3 = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

γιατί $\frac{d}{dy} 2y^{1/2} = 2 \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} = f(y)$.

Θεώρημα 4.12 (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης)

Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη με $\phi'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και έστω $I = \phi([a, b])$. Αν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

- $\int_a^b f \circ \phi = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\phi^{-1})'$
- $\int_a^b f(\phi(t)) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)(\phi^{-1}(s))' ds$.

Απόδειξη Εφόσον η συνάρτηση ϕ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται πουθενά, από το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών δεν αλλάζει πρόσημο στο $[a, b]$. Έπεται ότι η ϕ είναι γνησίως μονότονη και άρα αντιστρέψιμη. Αν $\psi : I \rightarrow [a, b]$ είναι η αντίστροφή της τότε η ψ' υπάρχει και είναι συνεχής στο I . Εφαρμόζοντας το θεώρημα 4.10 στη συνάρτηση $g = f\psi'$ βρίσκουμε

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\psi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} g = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} (g \circ \phi)\phi' = \int_a^b ((f\psi') \circ \phi)\phi' = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \psi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt.$$

Αλλά $\psi'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = (\psi \circ \phi)'(t) = 1$ (αφού $\psi = \phi^{-1}$) και άρα

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f\psi' = \int_a^b f(\phi(t)) dt.$$