2 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Παρατήρηση Αν $x_1, x, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$x_1 \leq x \leq x_2 \quad \Longleftrightarrow \text{ υπάρχει μοναδικό } \lambda \in [0,1] \text{ ώστε } x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2.$$

Πράγματι (υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_1 \neq x_2$) έχουμε

$$x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$$

και $0 \leq \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \leq 1$ αν και μόνον αν $x_1 \leq x \leq x_2$. Γεωμετρικά (όταν $\lambda \in (0,1)$) η σχέση $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ σημαίνει ότι το x διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα x_1 και x_2 σε λόγο

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Ορισμός 2.1 *Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα*[1]*, μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται* ***κυρτή*** *αν*

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in I \text{ και } \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

και ***κοίλη*** *αν*

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in I \text{ και } \lambda \in [0,1], \quad f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Η f λέγεται ***γνησίως κυρτή*** *[αντίστοιχα,* ***γνησίως κοίλη****] αν για κάθε $x_1, x_2 \in I,\ x_1 \neq x_2$ και $\lambda \in (0,1)$,*

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &< (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ \text{[αντίστοιχα]}\ \ f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) &> (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)\,. \end{aligned}$$

Μια συνάρτηση f είναι κοίλη αν και μόνον αν η $-f$ είναι κυρτή.

Γεωμετρικά, μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή αν και μόνον αν το γράφημά της είναι κάτω από κάθε χορδή του. Πράγματι: έστω $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ και $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2$. Αν το σημείο $(x, 0)$ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα

[1] Υπενθυμίζουμε ότι διάστημα είναι ένα υποσύνολο $I \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του, δηλαδή που ικανοποιεί

$$x, y \in I,\ x \leq y \Rightarrow [x, y] \subseteq I.$$

που ενώνει τα $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$ σε λόγο $\frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, τότε από το Θεώρημα του Θαλή προκύπτει ότι το αντίστοιχο σημείο (x, y) της χορδής που ενώνει τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) διαιρεί τη χορδή στον ίδιο λόγο, και συνεπώς το $(0, y)$ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(0, y_1)$ και $(0, y_2)$ πάλι στον ίδιο λόγο. Άρα $\frac{y-y_1}{y_2-y} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$, δηλαδή $y = (1-\lambda)y_1+\lambda y_2 = (1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$. Επομένως η ανισότητα $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ ισοδυναμεί με την $f(x) \leq y$.

Θα δείξουμε ότι μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη σε ανοικτό διάστημα είναι πάντα συνεχής, και, αν είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγός της είναι αύξουσα.

Λήμμα 2.1 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνον αν, για κάθε $x, y, z \in (a, b)$,*

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \qquad (1)$$

Απόδειξη Αν η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in (x, z)$ έχουμε $y = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$ άρα

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z) \qquad (2)$$

ισοδύναμα

$$f(y) - f(x) \leq \frac{y-x}{z-x}(f(z) - f(x)) \quad \overset{(y>x)}{\iff} \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Επίσης η (2) ισοδυναμεί με την

$$f(z) - f(y) \geq \frac{z-y}{z-x}(f(z) - f(x)) \quad \overset{(z>y)}{\iff} \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

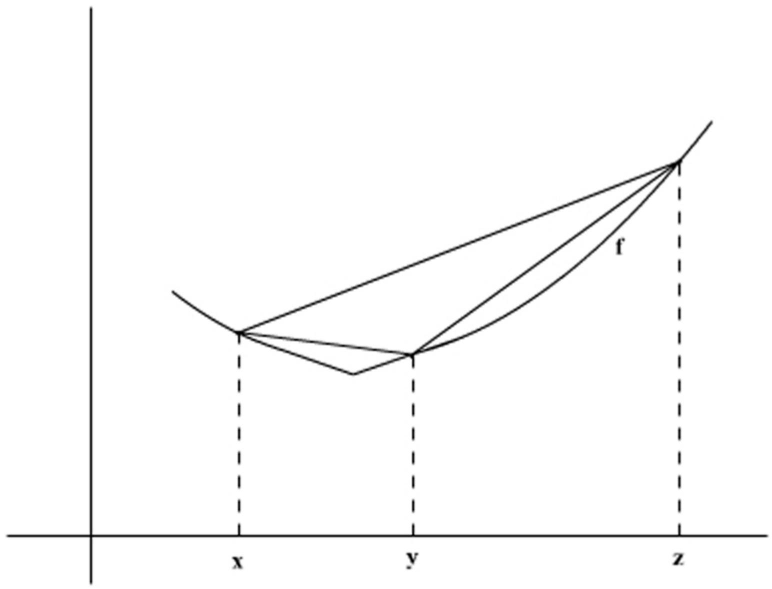
και έτσι η (1) αποδείχθηκε.

Αντίστροφα αν οι ανισότητες (1) ισχύουν **για κάθε** $x < y < z$ στο (a, b), τότε ισχύει και η (2), ισοδύναμα (γράφοντας $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ όπου $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$)

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$$

άρα η f είναι κυρτή. $\square$

Σημείωση Η (1) ονομάζεται συνήθως «η ιδιότητα των τριών χορδών».



Η ιδιότητα των τριών χορδών

Λήμμα 2.2 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Η συνάρτηση*

$$g_x : (a, b)\backslash\{x\} \to \mathbb{R} \;\; \mu\epsilon \;\; g_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

είναι αύξουσα.

Απόδειξη Αν $a < s < t < u < b$ από την ανισότητα (1) έχουμε

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}. \tag{3}$$

Θέτοντας $u = x$ από το δεξιά σκέλος της (3) προκύπτει[2] ότι

$$a < s < t < x \Rightarrow g_x(s) \leq g_x(t),$$

δηλαδή η g_x είναι αύξουσα στο (a, x). Θέτοντας $s = x$ από το αριστερά σκέλος της (3) προκύπτει ότι

$$x < t < u < b \Rightarrow g_x(t) \leq g_x(u),$$

[2]παρατήρησε ότι $g_x(y) = g_y(x)$, $x \neq y$

δηλαδή η g_x είναι αύξουσα στο (x,b). Τέλος, θέτοντας $t = x$ από την (3) προκύπτει ότι

$$a < s < x < u < b \Rightarrow g_x(s) \leq g_x(u)$$

και συνεπώς η g_x είναι αύξουσα στο $(a,x) \cup (x,b)$. $\square$

Πρόταση 2.3 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο*[3] *του I (όχι όμως κατ'ανάγκη στα άκρα).*

Απόδειξη Έστω $x_o \in I$ και $c, d \in I$ ώστε $c < x_o < d$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o. Από το Λήμμα 2.2, η συνάρτηση

$$g = g_{x_o} : [c, x_o) \cup (x_o, d] \text{ με } g(y) = \frac{f(y) - f(x_o)}{y - x_o}$$

είναι αύξουσα, άρα

$$g(c) \leq g(y) \leq g(d) \quad \text{για κάθε} \quad y \in [c, x_o) \cup (x_o, d].$$

Συνεπώς αν $M \equiv \max\{|g(c)|, |g(d)|\}$, έχουμε

$$-M \leq g(c) \leq g(y) \leq g(d) \leq M \quad \text{για κάθε} \quad y \in [c, x_o) \cup (x_o, d]$$

οπότε

$$\left| \frac{f(y) - f(x_o)}{y - x_o} \right| \leq M \;\Rightarrow\; |f(y) - f(x_o)| \leq M|y - x_o|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει και για $y = x_o$, δηλαδή για κάθε $y \in [c,d]$. Έπεται ότι αν δοθεί $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ (μάλιστα, $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$) ώστε για κάθε $y \in [c,d]$ με $|y - x_o| < \delta$ να ισχύει $|f(y) - f(x_o)| < \varepsilon$, άρα η f είναι συνεχής στο x_o. $\square$

Παρατηρήσεις 2.4 (ι) Παρατήρησε ότι το δ που επιλέξαμε στην απόδειξη εξαρτάται (όχι μόνον από το ε αλλά) και από το x_o, γιατί τα c, d, άρα και το M, εξαρτώνται από το x_o.

(ιι) Μια κυρτή συνάρτηση ορισμένη σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ είναι συνεχής στο (a,b), όχι όμως κατ' ανάγκη στο $[a,b]$. Ένα παράδειγμα είναι η

[3] δηλαδή σε κάθε $x_o \in I$ για το οποίο υπάρχουν $c, d \in I$ με $c < x_o < d$.

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0 \\ 1 & x=0\end{cases}$$

η οποία είναι κυρτή, αλλά δεν είναι συνεχής στο 0.

(ιιι) Από το Λήμμα 2.2 δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι αν $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση τότε για κάθε $x\in(a,b)$ τα όρια

$$\lim_{t\to x-}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'_-(x) \quad \text{και} \quad \lim_{s\to x+}\frac{f(s)-f(x)}{s-x}=f'_+(x)$$

υπάρχουν. Δεν έπεται όμως κατ' ανάγκη ότι η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει. Ένα παράδειγμα είναι η $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$, η οποία (ενώ έχει παντού πλευρικές παραγώγους) δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Πρόταση 2.5 *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $x\in(a,b)$. Αν η $f'(x)$ υπάρχει, τότε*

$$\text{για κάθε} \quad t\in(a,b), \quad f(x)+f'(x)(t-x)\le f(t).$$

Γεωμετρικά, αν η $f'(x)$ υπάρχει, η εφαπτόμενη στο γράφημα της f στο σημείο $(x,f(x))$ βρίσκεται κάτω από το γράφημα.

Απόδειξη Από το Λήμμα 2.2 έχουμε

$$a<t'<x<t<b \quad\Longrightarrow\quad \frac{f(t')-f(x)}{t'-x}\le\frac{f(t)-f(x)}{t-x}. \tag{4}$$

Επομένως, εφόσον η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $t'<x$ και $f'(x)=\lim\limits_{t'\to x-}\frac{f(t')-f(x)}{t'-x}$,

$$a<x<t<b \quad\Longrightarrow\quad f'(x)=\lim_{t'\to x-}\frac{f(t')-f(x)}{t'-x}\le\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

και επομένως,

$$a<x<t<b \quad\Longrightarrow\quad f(x)+f'(x)(t-x)\le f(t). \tag{5}$$

Αλλά, εφόσον η (4) ισχύει για κάθε $t>x$ και $f'(x)=\lim\limits_{t\to x+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$,

$$a<t'<x<b \quad\Longrightarrow\quad \frac{f(t')-f(x)}{t'-x}\le\lim_{t\to x+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(x),$$

οπότε

$$a<t'<x<b \quad\Longrightarrow\quad f(x)+f'(x)(t'-x)\le f(t'). \tag{6}$$

Από τις (5) και (6) προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.6 *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε*

$$f' \text{ αύξουσα} \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{κυρτή}.$$

Μάλιστα

$$f' \text{ γνησίως αύξουσα} \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{γνησίως κυρτή}.$$

Απόδειξη Έστω ότι η f είναι κυρτή. Τότε από το Λήμμα 2.1 για κάθε $x, y, z \in (a,b)$ έχουμε

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

και συνεπώς

$$f'(x) = \lim_{y \to x+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

όταν $x < z$. Επίσης όμως έχουμε

$$x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

και συνεπώς

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \lim_{y \to z-} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(z)$$

όταν $x < z$, άρα τελικά

$$x < z \quad \Rightarrow \quad f'(x) \leq f'(z)$$

δηλαδή η f' είναι αύξουσα.

Έστω ότι η f δεν είναι κυρτή. Πάλι από το Λήμμα 2.1 , η σχέση (1) δεν θα ισχύει για όλες τις τριάδες $x < y < z$. Θα υπάρχουν λοιπόν $x, y, z \in (a,b)$ με $x < y < z$ ώστε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ και $\eta \in (y,z)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(\eta)$$

οπότε $\xi < \eta$ αλλά $f'(\xi) > f'(\eta)$, άρα η f' δεν είναι αύξουσα.

Η δεύτερη ισοδυναμία αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Πόρισμα 2.7 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε*

$$f''(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{κυρτή}.$$

Μάλιστα αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η f είναι γνησίως κυρτή, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα (π.χ. $f(x) = x^8$).

Απόδειξη Η ισοδυναμία έπεται από το Θεώρημα και το γεγονός ότι (εφόσον η f' είναι παραγωγίσιμη) η f' είναι αύξουσα αν και μόνον αν η f'' είναι μη αρνητική.

Τέλος, αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b), άρα (από το Θεώρημα 2.6) η f είναι γνησίως κυρτή. $\square$

Το επόμενο πόρισμα προκύπτει αμέσως αν θεωρήσουμε την $-f$.

Πόρισμα 2.8 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε*

$$f' \text{ φθίνουσα} \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{κοίλη}.$$

Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Τότε

$$f''(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{κοίλη}.$$

Ορισμός 2.2 *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ένα σημείο $\xi \in (a, b)$ είναι* ***σημείο καμπής*** *για την f αν υπάρχει $\delta > 0$ με $(\xi - \delta, \xi + \delta) \subseteq (a, b)$ ώστε*

ή *η f να είναι γνησίως κυρτή στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κοίλη στο $[\xi, \xi + \delta)$*

ή *η f να είναι γνησίως κοίλη στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κυρτή στο $[\xi, \xi + \delta)$.*

Παρατήρηση 2.9 *Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, αν ένα $\xi \in (a, b)$ είναι σημείο καμπής για την f τότε είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την f'.*

Πράγματι, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως κυρτή στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κοίλη στο $[\xi, \xi + \delta)$, τότε (από το προηγούμενο θεώρημα και το πόρισμα) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(\xi - \delta, \xi)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\xi, \xi + \delta)$. Επειδή η f' είναι συνεχής, έπεται ότι έχει τοπικό μέγιστο στο ξ. Ομοίως, αν η f να είναι γνησίως κοίλη στο $(\xi - \delta, \xi]$ και γνησίως κυρτή στο $[\xi, \xi + \delta)$, τότε η f' έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ.

Πρόταση 2.10 *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν το ξ είναι σημείο καμπής για την f, τότε $f''(\xi)=0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Παράδειγμα: $f(x)=x^4$. Αν όμως $f''(\xi)=0$ και επιπλέον η $f'''(\xi)$ υπάρχει και είναι μη μηδενική, τότε το ξ είναι σημείο καμπής για την f.*

Απόδειξη Αν το ξ είναι σημείο καμπής, τότε η f' έχει τοπικό ακρότατο στο ξ και άρα $f''(\xi)=0$.

Έστω τώρα ότι $f''(\xi)=0$ και ότι η $f'''(\xi)$ υπάρχει και είναι μη μηδενική. Ας υποθέσουμε ότι $f'''(\xi)>0$ (η απόδειξη στην περίπτωση $f'''(\xi)<0$ είναι όμοια). Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1.2 για την $g=f''$: αφού $g'(\xi)>0$, υπάρχει μια περιοχή $(\xi-\delta,\xi+\delta)\subseteq(a,b)$ ώστε

$$\xi-\delta<x<\xi<y<\xi+\delta \quad\Longrightarrow\quad g(x)<g(\xi)<g(y).$$

Επειδή $g(\xi)=f''(\xi)=0$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\xi-\delta<x<\xi \ &\Rightarrow\ f''(x)=g(x)<0 \ \Rightarrow\ f' \text{ γν. φθίνουσα στο } (\xi-\delta,\xi)\\
\xi<x<\xi+\delta \ &\Rightarrow\ f''(x)=g(x)>0 \ \Rightarrow\ f' \text{ γν. αύξουσα στο } (\xi,\xi+\delta)
\end{aligned}$$

άρα (από το Θεώρημα 2.6) το ξ είναι σημείο καμπής για την f.

Ορισμός 2.3 *Αν $f:(M,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, η ευθεία $y=ax+b$ λέγεται (πλάγια)* ***ασύμπτωτος της f καθώς*** *$x\to+\infty$ αν το όριο $\lim_{x\to+\infty}(ax+b-f(x))$ υπάρχει και είναι το 0. Αντίστοιχα ορίζεται η ασύμπτωτος μιας συνάρτησης $f:(-\infty,M)\to\mathbb{R}$ καθώς $x\to-\infty$.*

Αν $c\in\mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f, η ευθεία $x=c$ λέγεται ***κατακόρυφη ασύμπτωτος της f στο*** *c αν τουλάχιστον ένα από τα όρια $\lim_{x\to c-}f(x)$ ή $\lim_{x\to c+}f(x)$ είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$.*

Άσκηση 2.11 *Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η ευθεία $y=ax+b$ να είναι ασύμπτωτος της f καθώς $x\to+\infty$ είναι να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ και $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$.*