08/05/2015

Θεώρημα (μέσης τιμής του ολ. λογισμού)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχει $y\in[a,b]$ τ.ω.

$$f(y)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Γενικότερα: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολ/μες, $g\geq 0$, τότε $\exists\, y\in[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(y)\int_a^b g(x)\,dx$$

Αυτό το αποδείξαμε.

Δεύτερη απόδειξη: Θεωρούμε την $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Αφού η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και συνεχής στο $[a,b]$.

Από το ΘΜΤ, υπάρχει $y\in(a,b)$: $\int_a^b f(x)\,dx - \cancel{\int_a^a f(x)\,dx} = F(b)-F(a)$

$= F'(y)(b-a) \overset{}{\underset{\text{Θ.Θ.}}{=\!=\!=}} f(y)(b-a)$

Θεώρημα (Β' Θεμ. Θεώρημα)

Έστω $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη, τότε $G(b)-G(a)=\int_a^b G'(x)\,dx$

Ένα παράδειγμα

Η $G:[0,1]\to\mathbb{R}$, $G(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ και $G(0)=0$, είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$.

Αν $0<x\leq 1$, τότε $G'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}x^2\cos\frac{1}{x^2}$

Αν $x=0$, τότε $G'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{0}\underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{φραγμ.}} = 0$

Όμως η G' δεν είναι φραγμένη:

Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \in [0,1]$, τότε

$$|G'(x_n)| = \left| \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \cancel{\sin(2n\pi)} - \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}} \underset{1}{\cos(2n\pi)} \right|$$

$$= 2\sqrt{2n\pi} \longrightarrow +\infty$$

Απόδειξη του Θεωρήματος:

Η μέθοδος → Θα δείξουμε ότι για κάθε διαμέριση ~~...~~

$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$ του $[a,b]$,

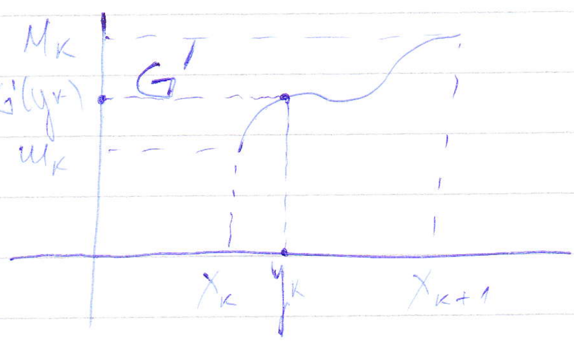
ισχύει $\boxed{L(G',P) \le G(b) - G(a) \le U(G',P)}$ (*)

$$\Longrightarrow \underbrace{\sup_P L(G',P)}_{\int_a^b G'(x)dx} \le G(b) - G(a) \le \underbrace{\inf_P U(G',P)}_{\int_a^b G'(x)dx}$$

Η απόδειξη της (*)

Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την G στο $[x_k, x_{k+1}]$:

υπάρχει $y_k \in (x_k, x_{k+1})$: $G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(y_k)(x_{k+1} - x_k)$



Επίσης,

$m_k(G') \le G'(y_k) \le M_k(G')$

$$m_k(G')\cdot(x_{k+1}-x_k) \le G'(y_k)(x_{k+1}-x_k) \le M_k(G')(x_{k+1}-x_k)$$

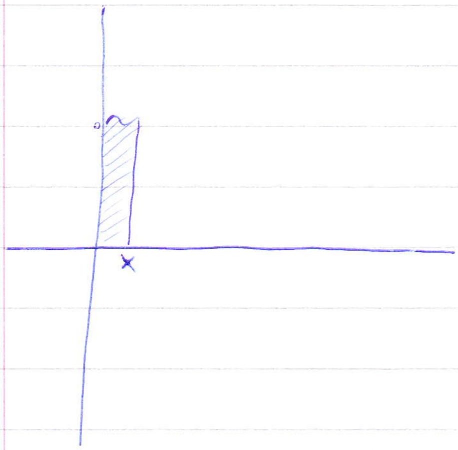
Δηλ. $$m_k(G')(x_{k+1}-x_k) \le G(x_{k+1})-G(x_k) \le M_k(G')(x_{k+1}-x_k)$$

•
$$\begin{aligned}
m_0(G')(x_1-x_0) &\le G(x_1)-G(x_0) \le M_0(G')(x_1-x_0)\\
&\le G(x_2)-G(x_1) \le M_1(G')(x_2-x_1)\\
&\le G(x_3)-G(x_2) \le M_2(G')(x_3-x_2)\\
&\quad\vdots\\
m_{n-1}(G') \quad &\le G(x_n)-G(x_{n-1}) \le M_{n-1}(G')(x_n-x_{n-1})
\end{aligned}$$

(+) $$L(G',P) \le \underset{\overset{\shortparallel}{b}}{G(x_n)}-\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{G(x_0)} \le U(G',P)$$

Ασκήσεις

20) Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = f(0)$$



1ος Τρόπος Έστω $\varepsilon>0$.
Υπάρχει $\delta>0$:
"αν $0<t<\delta$, τότε $|f(t)-f(0)|<\varepsilon/2$".

Έστω $0<x<\delta$. Τότε

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - f(0)\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{x}\int_0^x f(0)\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x}\int_0^x \big(f(t)-f(0)\big)\,dt\right| \le \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-f(0)|\,dt$$

Αν $0<t<x<\delta \Rightarrow |f(t)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\le \frac{1}{x}\,\frac{\varepsilon}{2}\,x < \varepsilon.$$

2ος τρόπος : με DLH

$$\frac{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)'}{(x)'} = \frac{f(x)}{1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)$$

Από "DLH", $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = f(0)$

Πρέπει όμως να εξηγήσουμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή "$\frac{0}{0}$"

$\bullet \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \qquad \bullet \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{\text{συνεχής}} = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

Ή γράφουμε : $|f| \leq M$ στο $[0,1]$

$$\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leq Mx \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

(23) $f:[0,1]\to \mathbb{R}$ συνεχής. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε ακολουθία

$$a_n = \int_0^1 \underbrace{f(x^n)}_{g_n(x)}\,dx$$

Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$

- Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε ένα $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_0$

$$\left|\int_0^1 f(x^n)\,dx - f(0)\right| < \varepsilon$$

* (0) $\exists M>0$: $\forall x\in[0,1]$ $f(x)\leq M$.

(1)

1η Παρατήρηση $\exists \delta>0$: αν $0<y<\delta$, τότε $|f(y)-f(0)|<\varepsilon/4$

x^n ;

→ Στη θέση του y θέλουμε "να βάλουμε" το x^n.

Θα μπορώ να γράψω $|f(x^n)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{4}$ για εκείνα τα x για τα οποία $x^n<\delta$, δηλ. $x<\sqrt[n]{\delta}$.

(2) Λέμε $\left|\int_0^1 f(x^n)dx - f(0)\right| = \left|\int_0^{\sqrt[n]{\delta}} f(x^n)dx + \int_{\sqrt[n]{\delta}}^1 f(x^n)dx - f(0)\sqrt[n]{\delta}\right.$

$\left. -(1-\sqrt[n]{\delta})f(0)\right| \leq \int_{\sqrt[n]{\delta}}^1 |f(x^n)|dx + (1-\sqrt[n]{\delta})|f(0)|$

$+ \int_0^{\sqrt[n]{\delta}} \left(f(x^n)-f(0)\right)dx$

$$\leq \int_{\sqrt[n]{\delta}}^1 \underbrace{|f(x^n)|}_{\leq M}dx + (1-\sqrt[n]{\delta})\underbrace{|f(0)|}_{\leq M} + \int_0^{\sqrt[n]{\delta}} |f(x^n)-f(0)|dx$$

$\leq M(1-\sqrt[n]{\delta}) + M(1-\sqrt[n]{\delta})$

$+ \frac{\varepsilon}{4}\underbrace{\sqrt[n]{\delta}}_{<1}$

* (0) Θυμηθείκαμε ότι πρέπει να γράψουμε...

$< 2M(1-\sqrt[n]{\delta}) + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon/2$

Αφού $\sqrt[n]{\delta}\to 1$, υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0$

$1-\sqrt[n]{\delta} < \varepsilon/8M$.

Οπότε...

Αλγόριθμος/Βήματα

- Μου δίνουν το ε. Επιλέγω $\delta>0$:
  "Αν $0<x<\delta$, τότε $|f(y)-f(0)|<\varepsilon/4$"
- Επιλέγω n_0: $\forall n \geq n_0$ $\quad 1-\sqrt{\delta} < \frac{\varepsilon}{5M}$

2η ώρα

Διάφορες Ασκήσεις

X

14 του Κεφ. 1

Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία. Αν x_n είναι οριακά σημεία της (a_n) και $x_n \to x \in \mathbb{R}$, τότε και ο x είναι οριακό σημείο της (a_n).

Χαρακτηρισμός

Ορισμός

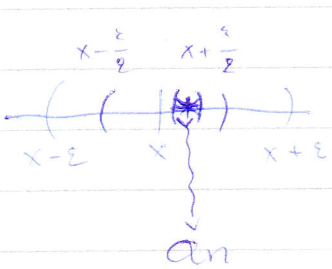
x ορ. σημείο της (a_n)

$\Updownarrow$ ορ.

$\exists\, a_{k_n} \to x$

$\Updownarrow$ χαρ.

$\forall \varepsilon>0$ στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι όροι της a_n.



Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού $x_n \to x$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:
$|x - x_{n_0}| < \varepsilon/2$.

Ο x_{n_0} είναι οριακό σημείο της a_n.

$\Longrightarrow$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος a_n που ικανοποιούν την ανισότητα $|x_{n_0} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Για όλους αυτούς τους a_n έχουμε:

$$|x - a_n| \le |x - x_{n_0}| + |x_{n_0} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

δηλ. άπειροι $a_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Άρα, ο x είναι οριακό σημείο της (a_n)

Επαναληπτική Άσκηση 7

(Είχε μπει σε εξέταση)

$\liminf b_n = -5$, $\limsup b_n = 10$.

Εξετάστε αν συγκλίνει η $\frac{b_n}{1+\ln n}$.

Η (b_n) είναι φραγμένη:

• Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge n_1$ $b_n < 11$

(το $\{n : b_n > 10 + \underbrace{1}_{\varepsilon}\}$ είναι πεπ.)

• Υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge n_2$ $b_n > -6$

(το $\{n : b_n > -5 - \underbrace{1}_{\varepsilon}\}$ είναι πεπ.)

Άρα, $\forall n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ $\quad -6 < b_n < 11 \Rightarrow |b_n| < 11$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |b_n| \le M = \max\{11, |b_1|, \dots, |b_{n_0}|\}$

Τότε $b_n \frac{1}{1+\ln n} \to 0$ (φραγμένη επί μηδενική)

18E

Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, \gamma > 0$, για τις οποίες η

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \,\eta\mu\left(\frac{1}{k^b}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{k^\gamma}\right)$$

συγκλίνει.

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\kappa^\gamma}\right) \xrightarrow{\text{όπου και αν είναι το } \gamma} 1$$

$$\eta\mu\left(\frac{1}{\kappa^\beta}\right) \quad \text{"}\sim\text{"} \quad \frac{1}{\kappa^\beta}$$

Θεωρούμε την $\beta_\kappa = \kappa^a \dfrac{1}{\kappa^\beta} \cdot 1 = \dfrac{1}{\kappa^{\beta-a}}$

Αν $\alpha_\kappa = \kappa^a \,\eta\mu\left(\frac{1}{\kappa^\beta}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\kappa^\gamma}\right)$, τότε

$$\frac{\alpha_\kappa}{\beta_\kappa} = \frac{\kappa^a}{\kappa^a} \cdot \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{\kappa^\beta}\right)}{\frac{1}{\kappa^\beta}} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{\kappa^\gamma}\right)}{1} \longrightarrow 1\cdot 1\cdot 1 = 1 > 0 \quad (\neq \infty)$$

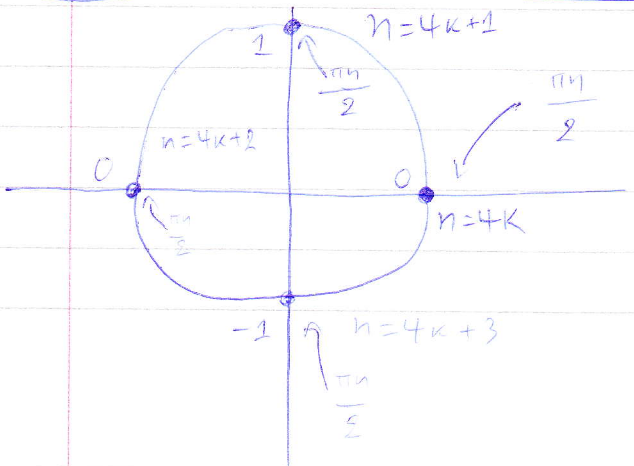
Άρα, η $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_\kappa$ συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \beta_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{\beta-a}}$,

δηλ. συγκλίνει αν $\beta - a > 1$.

Δηλ. τα "καλά" (a,β,γ) είναι τα: $\gamma>0,\ a>0,\ \beta>0,\ \beta-a>1$

6Ε $\quad \gamma_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi n}{2}$.

Βρείτε το $K = \{x : x \text{ οριακό σημείο}\}$ και τα $\liminf \gamma_n$, $\limsup \gamma_n$.



Θεωρώ τις 4 υπακολουθίες:

γ_{4k}

γ_{4k+1}

γ_{4k+2}

γ_{4k+3}

$$\gamma_{4k} = \left(1 - \frac{1}{4k}\right)\underset{0}{\underset{\|}{\sin(2k\pi)}} = 0 \longrightarrow 0$$

$$\gamma_{4k+1} = \left(1 - \frac{1}{4k+1}\right)\underset{1}{\underset{\|}{\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}} \longrightarrow 1$$

$$\gamma_{4k+2} = \left(1 - \frac{1}{4k+2}\right) 0 = 0 \longrightarrow 0$$

$$\gamma_{4k+3} = \frac{1}{4k+3} - 1 \longrightarrow -1$$

<u>Ισχυρισμός</u> $K = \{0, 1, -1\}$

Αν αποδειχθεί αυτό, έχουμε ουσιαστικά τελειώσει!

$$\left(\Longrightarrow \begin{array}{l} \liminf \gamma_n = -1 \\ \limsup \gamma_n = 1 \end{array} \right)$$

Σίγουρα $0, 1, -1 \in K$ $\left(\begin{array}{l} \gamma_{4k} \to 1 \\ \gamma_{4k+1} \to 0 \\ \gamma_{4k+3} \to -1 \end{array} \right)$

Έστω $x \in K$. Δηλ. x οριακό σημείο της (γ_n).

Έχουμε <u>κάποια</u> $\gamma_{k_n} \to x$.

Υπάρχουν άπειροι όροι της (γ_{k_n}) που είναι της μορφής γ_{4s}, είτε άπειροι όροι της μορφής γ_{4s+1}, είτε ... γ_{4s+2} ... γ_{4s+3}.

$\Longrightarrow$ η (γ_{k_n}) έχει <u>κοινή υπακολουθία</u> με κάποια από αυτές τις τέσσερις $\gamma_{4s}, \gamma_{4s+1}, \gamma_{4s+2}, \gamma_{4s+3}$.

Αν η $(\gamma_{k_{\lambda_n}})$ είναι κοινή υπ/θια των $(\gamma_{k_n}), (\gamma_{4s})$, τότε

$\gamma_{k_{\lambda_n}} \to x$ και $\gamma_{k_{\lambda_n}} \to 0 \Longrightarrow \boxed{x = 0}$

Κ.Ο.Κ. $\Longrightarrow$ $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$