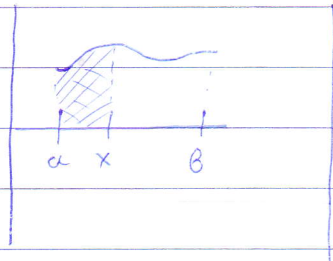
<u>Ορισμός</u> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Το <u>αόριστο ολοκλήρωμα</u> της f είναι η συνάρτηση $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$



<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 1</u> Η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.

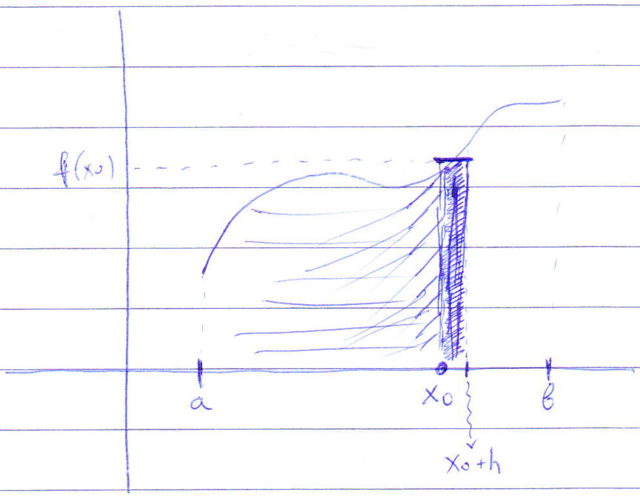
<u>Αποδ.</u>
Υπάρχει $M>0$: $\forall t\in[a,b]$, $|f(t)|\le M$.
Αν $x>y$ στο $[a,b]$,

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_y^x |f(t)|\,dt \le \int_y^x M\,dt = M(x-y) = M|x-y|.$$

Δηλ. η F είναι <u>Lipschitz συνεχής</u> με σταθερά M

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2</u> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0\in[a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0)=f(x_0)$



$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \underset{h\to 0^+}{\approx} \frac{h\,f(x_0)}{h}$$

(η ιδέα...)

Παρατήρηση

$$f(x_0) = \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right) \frac{1}{h}$$

Τετριμμένη Ισότητα

Το "κλειδί" για την απόδειξη

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει το

$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ και ότι είναι ίσο με $f(x_0)$.

Υποθέτουμε ότι $a<x_0<b$ ($x_0=a$ ή $x_0=b$ ανάλογη απόδειξη)

Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $\delta>0$:

(i) $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq [a,b]$

(ii) Αν $0<|h|<\delta$, τότε

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

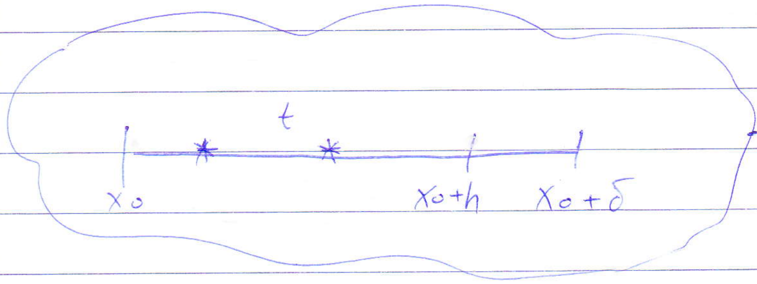
Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta>0$: $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq [a,b]$ και $\forall t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$, $|f(t)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

- Έστω $0<|h|<\delta$

- 1^{η} περίπτωση $0<h<\delta$

$$\left| \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \underbrace{\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt}_{\substack{\text{πράγματι} \\ = f(x_0)}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt \right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\,dt <$$



$$< \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{\varepsilon}{2}\,dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

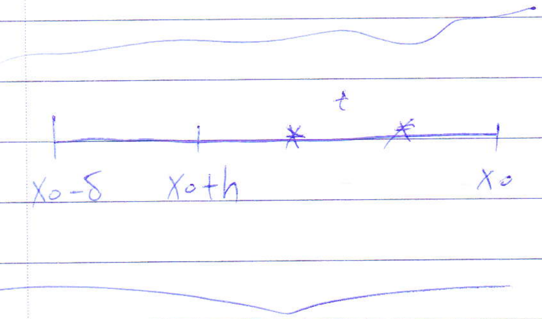
• 2η περιπτωση

$-\delta < h < 0$

$$\left| -\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} + f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h}\int_a^{x_0} f - \frac{1}{h}\int_a^{x_0+h} f + f(x_0) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(x_0)\,dt \right| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\left| \int_{x_0+h}^{x_0} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt \right| \le \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0} \underbrace{|f(t)-f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\,dt \le$$



$$\le \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\frac{\varepsilon}{2}\,dt = \frac{1}{|h|}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\underbrace{(-h)}_{|h|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (α' θεμ. θεώρημα)

- Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>συνεχής</u>. Τότε η $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

<u>Ορισμός</u> (παράγουσα ή αντιπαράγωγος) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται <u>παράγουσα</u> (ή αντιπαράγωγος) της f αν

$$G'(x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in[a,b].$$

$f(x)=x$	$G(x)=\frac{x^2}{2}$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\cos x$	$\sin x$

Παρατηρήσεις

1. Αν η f είναι <u>συνεχής</u>, τότε το αόριστο ολοκλήρωμά της, η $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, ικανοποιεί την $F'\equiv f$ (από το α' θεμ. θεώρημα) <u>άρα</u> είναι <u>παράγουσα</u> της f.

---

2. Αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f, τότε, $\forall x\in[a,b]$, έχουμε $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$.

$$\Rightarrow \forall x\in[a,b] \quad (G-F)'(x)=f(x)-f(x)=0$$
$$\Rightarrow G-F=\text{σταθερή}.$$

Αντίστροφα, κάθε $G(x)=F(x)+c$ είναι παράγουσα της f.

Τότε, έχουμε $\left.\begin{array}{l} G(x) = F(x) + c \\ G(a) = F(a) + c \end{array}\right\} \Longrightarrow G(x) - G(a) = F(x) - F(a)$

$$= \int_a^x f(t)\,dt - \cancel{\int_a^a f(t)\,dt}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

- Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Αν G είναι μια παράγουσα της f, τότε

για κάθε $x \in [a,b]$, $G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Ειδικότερα, $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$

Παράδειγμα:

$\int_0^2 x^3\,dx = ;$ / Η $G(x) = \frac{x^4}{4}$ είναι παράγουσα της $f(x) = x^3$.

$$\overset{\Theta.}{\Longrightarrow} \int_0^2 \underbrace{f(t)}_{= x^3}\,dt = G(2) - G(0) = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

2η ώρα

Ασκήσεις

(7) - Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, φραγμένη. Αν υπάρχει P διαμέριση του (με αλλαγή) $[a,b]$ ώστε $L(f,P) = U(f,P)$, τότε η f είναι ολ/μη.

(μάλιστα, μπορούμε να δείξουμε ότι f = σταθερή)

(α) $\overline{\int_a^b} f \leq U(f,P) \underset{\text{υποθ.}}{=\!=} L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Άρα, όλα είναι ίσα. $\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f$ ολ/μη.

(β) Η f είναι σταθερή. || Ας υποθέσουμε ότι

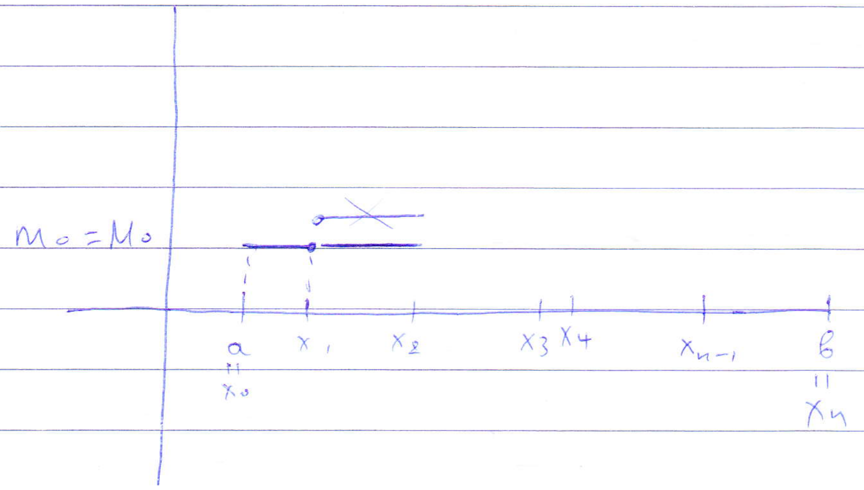
$$P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$$
και $L(f,P)=U(f,P)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{(M_k-m_k)}_{=0}\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{>0}=0 \Longrightarrow$$ Όλοι οι προσθεταίοι μηδενίζονται

$$\Rightarrow \forall k=0,1,\dots,n-1 \quad m_k=M_k$$

ΣΧΗΜΑ



- $\forall x\in[x_0,x_1]$ $m_0\le f(x)\le M_0=m_0$
  $\Rightarrow$ η $f\equiv m_0$ στο $[x_0,x_1]$

- Ομοίως, $f\equiv m_1$ στο $[x_1,x_2]$

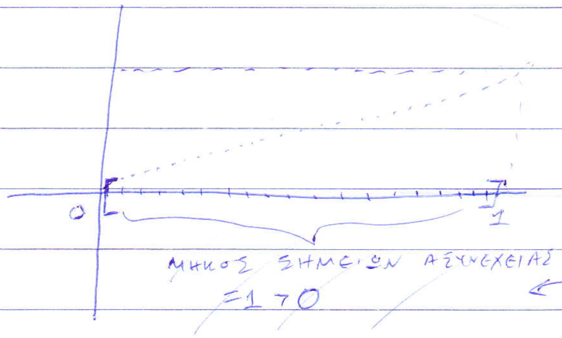
- Έχουμε $x_1\in[x_0,x_1] \Rightarrow f(x_1)=m_0$
  και $x_1\in[x_1,x_2] \Rightarrow f(x_1)=m_1$ $\Big\}\Rightarrow m_0=m_1$

- Με τον ίδιο τρόπο, δ. ότι $m_0=m_1=m_2=\dots=m_{n-1}$
  $\Longrightarrow$ Η f είναι σταθερή στο $[a,b]$.

Άσκηση (Παράδειγμα) (Από τις Επαναληπτικές)

Η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

δεν είναι ολοκληρώσιμη.



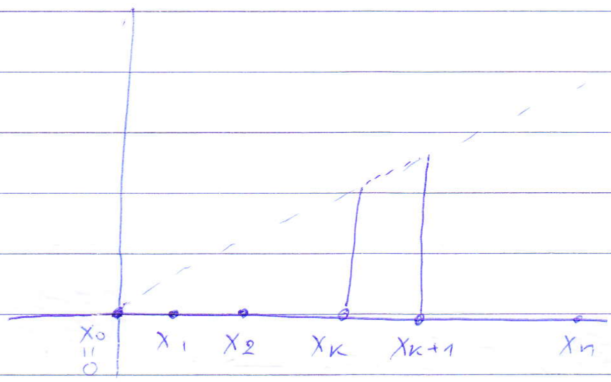
Υπάρχουν 4 τρόποι
Ο 4ος με τις έννοιες του μέτρου και του μεγέθους

Α' τρόπος Θα δείξουμε ότι $\forall$ διαμέριση P του $[0,1]$

$$U(f,P)-L(f,P)\geq \dots$$

Τότε, δεν ικανοποιείται το Κριτήριο του Riemann $\Rightarrow$ f όχι ολ/μη.

- Έστω P

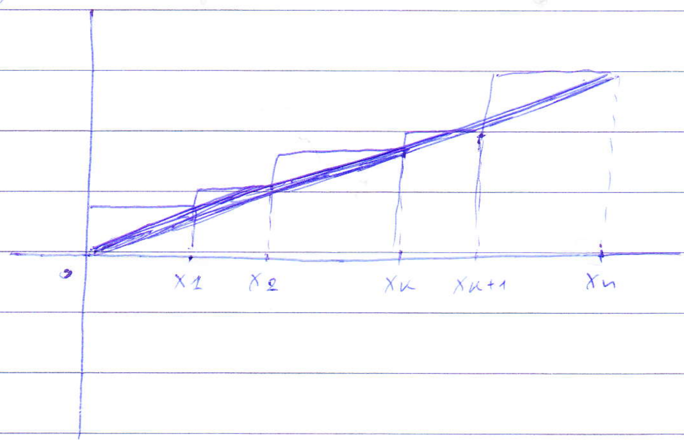


- $m_k=0$, $M_k=x_{k+1}$ (υπάρχει $q_n\in[x_k,x_{k+1}]$ τ.ω. $q_n\to x_{k+1}$ $\Rightarrow q_n=f(q_n)\to x_{k+1}$)

- Άρα $L(f,P)=0$ $\left(\Rightarrow \underline{\int_0^1} f=0\right)$

Όμως $U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1}-x_k)$

Χρειάζεται νδο ότι το άθροισμα αυτό έχει κάτω φράγμα >0



Γεωμετρική Ένδειξη

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1}-x_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k+x_{k+1}}{2}(x_{k+1}-x_k) =$$

$$x_{k+1} > \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2-x_k^2) = \frac{x_n^2-x_0^2}{2} = \frac{1^2-0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Γ' τρόπος → Με τον ορισμό του Riemann

Παίρνω διαμέριση σε n ίσα τμήματα P_n και δύο διαφορετικές επιλογές Ξ_n, Ξ_n'

ώστε $\Sigma(f, P_n, \Xi_n) \longrightarrow a$

$$\Sigma(f, P_n, \Xi_n') \longrightarrow b \neq a$$

• $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής με σταθερά M.

• Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \frac{M}{2n} \quad (\longrightarrow 0)$$

Τέχνασμα που είδαμε... $\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b \lambda\,dt$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt$$

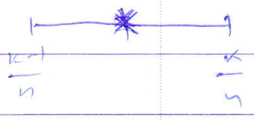
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{\frac{1}{n}} f\left(\frac{1}{n}\right)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f\left(\frac{2}{n}\right)dt + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(1)\,dt$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)\,dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

Έχουμε $\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx\right|$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dx \le$$

$$\le M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|x - \frac{k}{n}\right|dx = M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n} - x\right)dx$$



$$= M \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{-\left(\frac{k}{n}-x\right)^2}{2} \right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = M \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{0^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} \right)$$

$$= M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^2} = M \cdot n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}$$

---

(33) $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$.

{Αντιστοιχία με το "Κριτήριο Παρεμβολής"}

(i) $f \le g \le h$

(ii) οι f και h είναι ολ/μες και $\int_a^b f = \int_a^b h$.

Τότε, η g είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b g = \int_a^b f = \int_a^b h$

Έστω $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ διαμ. του $[a,b]$.

Σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $f(x) \le g(x) \le h(x)$

ΕΞΗΓΗΣΤΕ ΤΟ $\Rightarrow$ $m_k(f) \le m_k(g) \le m_k(h)$ και

$M_k(f) \le M_k(g) \le M_k(h)$

$$\Rightarrow \underset{\sum m_k(f)(x_{k+1}-x_k)}{\underset{\shortparallel}{L(f,P)}} \le \underset{\sum m_k(g)(x_{k+1}-x_k)}{\underset{\shortparallel}{L(g,P)}} \le \underset{\sum m_k(h)(x_{k+1}-x_k)}{\underset{\shortparallel}{L(h,P)}}$$

$$\Rightarrow \sup_P L(f,P) \le \sup_P L(g,P) \le \sup_P L(h,P)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g \le \underline{\int_a^b} h.$$ (Γράφουμε αντίστοιχα... με $U(f,P)$, $U(g,P)$, $U(h,P)$)

Ομοίως, $\overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} h$. $\Rightarrow I \le \underline{\int_a^b} g$, $\overline{\int_a^b} g \le I \Rightarrow$

$\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = I$ ✓