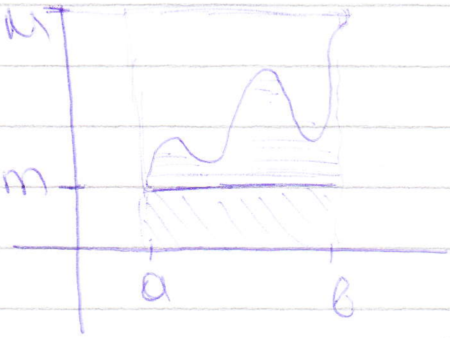
24/4

Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Πρόταση: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.
Αν $m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$ τότε

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

Απόδειξη



Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$

$$L(f,P)\le\int_a^b f(x)\,dx\le U(f,P)$$

Όμως $U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)$

$$\boxed{M_k=\sup\{f(x): x_k\le x\le x_{k+1}\}\le M}$$

$\le\sum_{k=0}^{n-1}M(x_{k+1}-x_k)=M\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$

$=M(b-a)$

Όμοια η $L(f,P)\ge m(b-a)$ διότι $\forall k \ m_k\ge m$

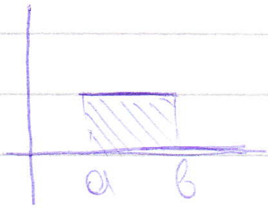
άρα

$$m(b-a)\le L(f,P)\le\int_a^b f(x)\,dx\le U(f,P)\le M(b-a)$$

Πόρισμα 1: Αν $f(x)=c$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = c(\beta-\alpha)$$

(Ναι, μπορώ να πάρω $M=m=c$)



Πόρισμα 2: Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολ/μη και $f\geq 0$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$$

(Ναι, μπορώ να πάρω $m=0$)

(Ο αριθμός $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ λέγεται μέση τιμή της f.)

Θεώρημα (Γραμμικότητα ολοκληρώματος)

Αν $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και αν $t,s\in\mathbb{R}$ τότε η $tf+sg:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη

και $$\int_\alpha^\beta (tf+sg)(x)\,dx = t\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + s\int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

Απόδειξη

Δείχνουμε (1) f,g ολ/μες $\Rightarrow f+g$ ολ/μη και $\int(f+g)=\int f+\int g$

(2) f ολ/μη και $t\in\mathbb{R} \Rightarrow tf$ ολ/μη και $\int(tf)=t\int f$

Από τα (1) και (2) έχουμε το θεώρημα.

Αποδεικνύουμε μόνο το (1)

Θεωρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$
Θέλουμε να συνδέσουμε τα

$$L(f,P),\ L(g,P),\ L(f+g,P)$$

$\forall\ k = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε

$$m_k = m_k(f+g) = \inf\{f(x)+g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$$

$$m_k' = m_k(f),\quad m_k'' = m_k(g)$$

Ισχυρισμός $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$ $\left.\begin{array}{l} m_k' \le f(x) \\ \text{και } m_k'' \le g(x) \end{array}\right\} m_k' + m_k'' \le f(x)+g(x)$

Άρα ο $m_k' + m_k''$ είναι κάτω φράγμα του

$$\{f(x)+g(x) : x_k \le x \le x_{k+1}\}$$

$\Longrightarrow m_k' + m_k'' \le m_k$ το μέγιστο κάτω φράγμα.

Άρα $m_k' + m_k'' \le m_k$

Ομοίως αν ορίσουμε $M_k = M_k(f+g)$, $M_k' = M_k(f)$,

$M_k'' = M_k(g)$

έχουμε $M_k \le M_k' + M_k''$

Τότε έχουμε : ~~$L(f+g,P)$~~

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) = L(f+g,P) \le U(f+g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \ge \sum_k m_k'(x_{k+1}-x_k) + \sum_k m_k''(x_{k+1}-x_k) = L(f,P)+L(g,P)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \le \sum M_k'(x_{k+1}-x_k) + \sum_k M_k''(x_{k+1}-x_k) = U(f,P)+U(g,P)$$

Δείξαμε ότι: $\forall P \quad L(f,P)+L(g,P) \leq L(f+g,P)$

$\leq U(f+g,P) \leq U(f,P)+U(g,P)$

Αφού η f είναι ολ/μη, $\exists P_1: U(f,P_1) < L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}$ (κρ. Riemann)

<< g << $\exists P_2: U(g,P_2) < L(g,P_2)+\frac{\varepsilon}{2}$ (<<)

Ορίζουμε: $P=P_1 \cup P_2$. Τότε $U(f,P) \leq \cancel{U(f,P_1)} < L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}$

$\leq L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}$

άρα $U(f,P) < L(f,P)+\frac{\varepsilon}{2}$

και όμοια $U(g,P) < L(g,P)+\varepsilon/2$.

Συνδυάζοντας τις ανισότητες έχουμε:

(*) $L(f,P)+L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P)+U(g,P) < L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon$

$\Longrightarrow U(f+g,P)-L(f+g,P)<\varepsilon$

Από κριτήριο Riemann η $f+g$ είναι ολ/μη.

Μένει νδο $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

Έστω $\varepsilon>0$ και P μια διαμέριση που ικανοποιεί την (*)

Παρατηρούμε ότι: $\boxed{L(f+g,P) \le \int (f+g) \le U(f+g,P)}$

$$L(f,P) \le \int f \le U(f,P)$$

$$L(g,P) \le \int g \le U(g,P)$$

$$\Big\Downarrow +$$

$$L(f,P)+L(g,P) \le \int f + \int g \le U(f,P)+U(g,P)$$

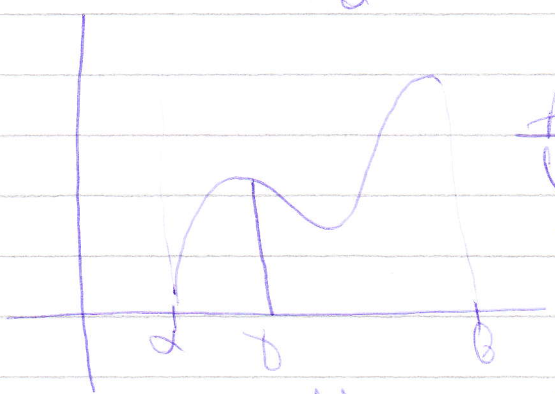
και οι δύο αριθμοί είναι στο διάστημα $[L(f,P)+L(g,P),\ L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon]$
$\Rightarrow \int(f+g) - \int f - \int g \le \varepsilon$
αφού το ε είναι τυχόν $\int(f+g) = \int f + \int g$

Θεώρημα (προσθετικότητα)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και έστω $a<\gamma<b$. Τότε

η f είναι ολ/μη στο $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ η f είναι ολ/μη στο $[a,\gamma]$ και στο $[\gamma,b]$

και τότε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^b f(x)\,dx$



Απόδειξη ($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$

Υπάρχει διαμέριση $Q=\{\alpha=x_0<\dots<x_k=\gamma\}$ του $[\alpha,\gamma]$ ώστε

$U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon/2$ (κρ. Riemann)

Υπάρχει $R=\{\gamma=x_k<\dots<x_m=\beta\}$ του $[\gamma,\beta]$

ώστε $U(f,R)-L(f,R)<\varepsilon/2$

Παίρνουμε $P = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < \underset{\substack{\| \\ b}}{x_k} < x_{k+1} < \dots < x_m = b \}$

Η P είναι διαμέριση του $[a, b]$ και

$$U(f, P) - L(f, P) = U(f, Q) + U(f, R) - (L(f, Q) + L(f, Q)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Από κρ. Riemann, η f είναι ολ/μη στο $[a, b]$

Τώρα ξέρουμε ότι υπάρχουν τα $\int_a^b f$, $\int_a^b f$, $\int_b^b f$

$$L(f, P) = L(f, Q) + L(f, R) \leq \int_a^b f + \int_b^b f \leq$$

$$\leq U(f, Q) + U(f, R) = U(f, P) + \varepsilon$$

$$L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P) < L(f, P) + \varepsilon$$

Άρα, $\left| \int_a^b f - \left(\int_a^b f + \int_b^b f \right) \right| \leq \varepsilon$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν $\int_a^b f = \int_a^b f + \int_b^b f$

$(\Longrightarrow)$

Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει διαμέριση $Q=\{a=x_0<\dots<x_m=\beta\}$
τ.ω
$$U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$$

Ορίζουμε $P=Q\cup\{\gamma\}$. Τότε $U(f,P)-L(f,P)\leq$
$$\leq U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon.$$

Τώρα έχουμε $P=\{a=x_0<\dots<x_k<\gamma<x_{k+1}<\dots<x_m=\beta\}$

Ορίζουμε $P_1=P\cap[\alpha,\gamma]=\{\alpha=x_0<\dots<x_k<\gamma\}$

$P_2=P\cap[\gamma,\beta]=\{\gamma<x_{k+1}<\dots<\beta\}$

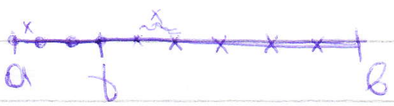
Τότε $\big(U(f,P_1)-L(f,P_1)\big)+\big(U(f,P_2)-L(f,P_2)\big)=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$

Άρα $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon$ και $U(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon$

$\Downarrow$ κρ. Riemann $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ κρ. Riemann

f ολ/μη στο $[a,\gamma]$ $\qquad\qquad$ f ολ/μη στο $[\gamma,\beta]$

Σχόλιο:



$$\left.\begin{array}{l}\gamma-a=kx,\ k\in\mathbb{N}\\ \beta-\gamma=mx,\ m\in\mathbb{N}\end{array}\right\}\ \frac{\gamma-a}{\beta-\gamma}=\frac{k}{m}\in\mathbb{Q}$$

Πόρισμα (μονοτονικότητας)

Αν $f,g:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ ολ/μες και $f(x)\leq g(x)\ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$
τότε $$\int_a^\beta f(x)\,dx\leq\int_a^\beta g(x)\,dx$$

Απόδειξη: Η $g-f \geq 0$ είναι ολ/μη ως γραμμικός συνδυασμός ολ/μων συναρτήσεων.

$$\boxed{g-f = 1\,g + (-1)\,f}$$

$$\xrightarrow[\text{πρόταση } 1]{\text{Πόρισμα}} \int_a^b (g-f) \geq 0$$

$$\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

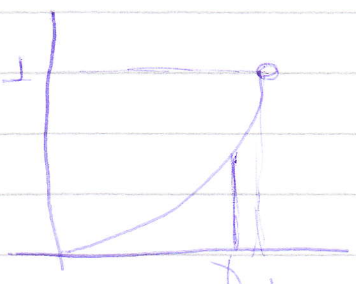
1) f ολ/μη $\Rightarrow$ f φραγμένη (ΝΑΙ, δεν μιλάμε για ολοκλήρωμα μη φραγμ. συν)

2) f ολ/μη, φραγμένη τότε παίρνει μέγιστη τιμή

ΟΧΙ

πχ $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$, $f:[0,1] \to \mathbb{R}$

Έχει $\sup(f) = 1$ αλλά δεν παίρνει την τιμή 1.



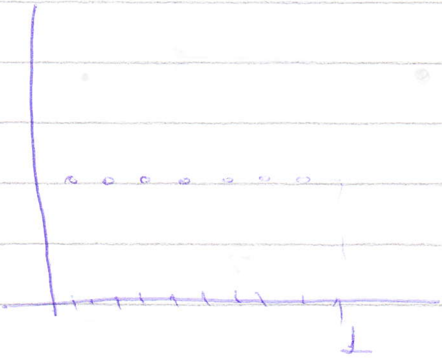
Η f είναι ολ/μη για κάθε $0 < \delta < 1$
η f είναι συνεχής στο $[0,\delta]$
άρα είναι ολ/μη στο $[0,\delta]$

Επίσης η f είναι φραγμένη $\forall x \in [0,1]$
$0 \leq f(x) \leq 1$

Από την Β.Α.9 η f είναι ολ/μη.

3) Αν η f είναι φραγμένη τότε είναι ολοκληρώσιμη

ΟΧΙ



$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in Q\\ 1, & x\notin Q\end{cases}$$

$f\,[0,1]\to\mathbb{R}$

Είναι φραγμένη και όχι ολοκληρώσιμη

$\forall P \quad L(f,P)=0$

$U(f,P)=1$

4) Αν η $|f|$ είναι ολ/μη τότε η f είναι ολ/μη

ΟΧΙ. Η $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in Q\\ 1, & x\notin Q\end{cases}$ στο $[0,1]$ δεν είναι ολ/μη (από 3)

αλλά $|f(x)|=1 \quad \forall x\in[0,1]$

δηλ. $|f|=$ σταθερή $\Rightarrow$ ολ/μη

5) Αν η $f\,[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολ/μη τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$:

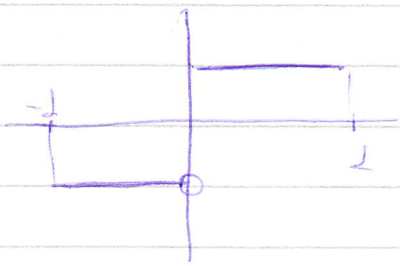
$$f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ΟΧΙ

Δηλ. η μέση τιμή $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ της f είναι τιμή της συνάρτησης

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ -1, & -1\le x<0\end{cases}$$



Είναι ολ/μη

και $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$ όμως η f δεν μηδενίζεται πουθενά.

8) Η $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι ολ/μη και για κάθε ρητό $q\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(q)=0$.
Τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx=0$$ ΝΑΙ

Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b\}$

Για κάθε k υπάρχει ρητός $q_k\in[x_k,x_{k+1}]$

$$\Longrightarrow m_k\le \underset{0}{\underset{\|}{f(q_k)}}\le M_k$$

Άρα $L(f,P)=\sum_k m_k(x_{k+1}-x_k)\le 0$

και $U(f,P)=\sum_k M_k(x_{k+1}-x_k)\ge 0$

Τότε $\displaystyle\int_a^b f=\sup_P L(f,P)\le 0$ και $\displaystyle\int_a^b f=\inf_P \underbrace{U(f,P)}_{\ge 0}\ge 0$

άρα $\displaystyle\int_a^b f=0$.