ΜΑΘΗΜΑ 14ο 30/03/15

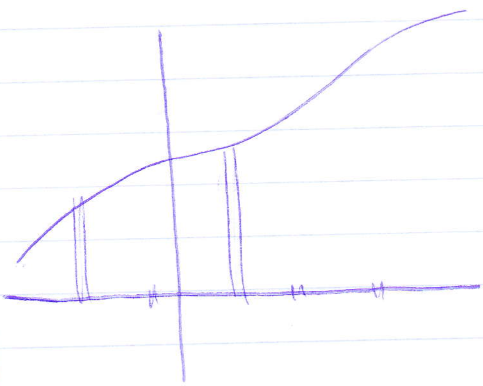
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$.

(α) Η <u>συνέχεια</u> ορίζεται σε <u>κάθε $x \in A$</u> χωριστά:
"Η f είναι συνεχής στο $x \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$: αν $y \in A$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$".

Κατόπιν λέμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση, αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in A$

(β) Η f λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση</u> αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in A$ και για κάθε $y \in A$ με $|y - x| < \delta$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Ισοδύναμα: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

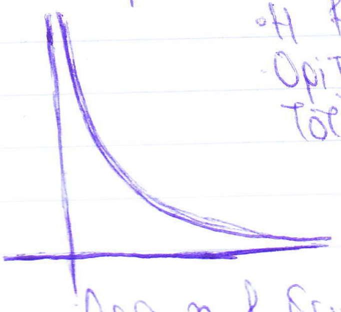


<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1</u>: Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2</u>: Η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στο A που ικανοποιούν την $y_n - x_n \to 0$ ισχύει $f(y_n) - f(x_n) \to 0$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: Αν για κάποια $f: A \to \mathbb{R}$ (συνεχής) μπορούμε να βρούμε $x_n, y_n \in A$ με $y_n - x_n \to 0$ αλλά $f(y_n) - f(x_n) \not\to 0$ τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

π.χ. $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$.



• Η f είναι συνεχής

Ορίζουμε $x_n = \frac{1}{n} \in (0, +\infty)$ και $y_n = \frac{1}{2n} \in (0, +\infty)$

Τότε $x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$ αλλά

$f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - 2n = -n$

Άρα η f <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής

Ασκήσεις (πάνω στον ορισμό)

(6) Έστω $f:A\to[m,M]$ και $g:[m,M]\to\mathbb{R}$, ομοιόμορφα συνεχής συναρτήσεις. Τότε η $g\circ f: A\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $\delta>0$: "$\forall x,y\in A: |x-y|<\delta$ ισχύει $|g(f(x))-g(f(y))|<\varepsilon$"

Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε $\exists \eta>0$ ώστε: "$\forall u,v\in[m,M]$ με $|u-v|<\eta$ ισχύει $|g(u)-g(v)|<\varepsilon$".

Για αυτό το $\eta>0$, αφού η $f:A\to[m,M]$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, μπορούμε να βρούμε $\delta>0$:
"$\forall x,y\in A$ με $|x-y|<\delta$ ισχύει $|f(x)-f(y)|<\eta$" (**)

Έστω $x,y\in A$ με $|x-y|<\delta$. Τότε, από την (**) έχουμε
$\underbrace{f(x)}_{u}, \underbrace{f(y)}_{v}\in[m,M]$ και $|f(x)-f(y)|<\eta$.

$$\overset{\text{από την } (*)}{\Longrightarrow} |g(f(x))-g(f(y))|<\varepsilon$$
$$\Downarrow$$
$$|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(y)|<\varepsilon.$$

Άλλος τρόπος: Έστω $x_n,y_n\in A$ με $y_n-x_n\to 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα $f(\underbrace{y_n}_{u_n})-f(\underbrace{x_n}_{v_n})\to 0$

Έχουμε $u_n,v_n\in[m,M]$ και $u_n-v_n\to 0$

$\overset{g \text{ ομ. συν}}{\Longrightarrow} g(u_n)-g(v_n)\to 0$ δηλ. $g(f(y_n))-g(f(x_n))\to 0$

(7) Έστω $f, g: I \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής
(α) Η $f+g$ είναι ομ. συνεχής.

[Έστω $x_n, y_n \in I$ με $y_n - x_n \to 0$. Τότε $(f+g)(y_n) - (f+g)(x_n) =$
$= f(y_n) + g(y_n) - f(x_n) - g(x_n) = [f(y_n) - f(x_n)] + [g(y_n) - g(x_n)] \to$
$\to 0 + 0 = 0$ διότι f, g ομ. συνεχείς.

(β) Η $f \cdot g$ δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφα συνεχής

Το παράδειγμα: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = g(x) = x$

Οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς, αλλά η $(f \cdot g)(x) = x \cdot x = x^2$ όχι.

Οι f, g είναι φραγμένες: $\exists A, B > 0$: $\forall x \in I$: $|f(x)| \leq A$ και $|g(x)| < B$
Έστω $x_n, y_n \in I$ με $y_n - x_n \to 0$. Τότε $f(y_n) g(y_n) - f(x_n) g(x_n) =$
$= f(y_n)(g(y_n) - g(x_n)) + g(x_n)(f(y_n) - f(x_n))$

$f(y_n)$: φραγμένη απολύτως από A; $g(y_n) - g(x_n) \to 0$ (g: ομ. συνεχής); $g(x_n)$: φραγμένη απολύτως από B; $f(y_n) - f(x_n) \to 0$ (f: ομ. συνεχής)

→ **Lipschitz συναρτήσεις**: Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται Lipschitz συνεχής με σταθερά $M > 0$ αν για κάθε $x, y \in A$ ισχύει
$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

(*) Κάθε Lipschitz συνεχής f είναι ομ. συνεχής:
Αν μου δώσουν $\varepsilon > 0$ αρκεί να πάρω $\delta = \varepsilon / M$ και ικανοποιείται ο ορισμός.

Ασκήσεις 2-3-4-5 (για τις Lipschitz συναρτήσεις και την ομοιόμορφη συνέχεια)

(3) Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο διάστημα του διαστήματος I.
Τότε η f είναι Lipschitz συνάρτηση αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη συνάρτηση.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ξέρουμε ότι $\exists M>0: \forall x, y \in I: |f(x)-f(y)| \le M \cdot |x-y|$.
Παίρνουμε x στο εσωτερικό του I και θδο $|f'(x)| \le M$.
(άρα η f' είναι φραγμένη)

Ξέρουμε ότι $f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \Rightarrow |f'(x)| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right|$

Όμως, για κάθε $x, x+t \in I$ έχουμε $|f(x+t)-f(x)| \le M \cdot |(x+t)-x| = M|t| \Rightarrow$

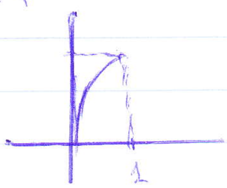
$$\xRightarrow{t \neq 0} \left| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \right| \le M.$$

Άρα $|f'(x)| \le M$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι η f' υπάρχει σε κάθε x στο εσωτερικό του I, και $\exists M>0: |f'(x)| \le M$.
Παίρνουμε $x, y \in I$. Ζητάμε $|f(y)-f(x)| \le M \cdot |y-x|$.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \neq y$. Αν π.χ. $x<y$
τότε ΘΜΤ: $\exists \xi \in (x,y): f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$.

Από την υπόθεση $|f'(\xi)| \le M$, άρα $|f(y)-f(x)| = |f'(\xi)||y-x| \le M \cdot |y-x|$

(2) Είναι σωστό ότι κάθε ομ. συνεχής συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής;
Θεωρούμε την $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$
- Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής (ΘΕΩΡΗΜΑ).



• Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Αν η f ήταν Lipschitz συνεχής, τότε η f' θα ήταν φραγμένη στο $(0,1)$.
Όμως, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$

Άρα η f' δεν είναι φραγμένη.

(4) Έστω $n \geq 2$, $f: [0,1] \to \mathbb{R}$: $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Όλες αυτές είναι ομοιόμορφα συνεχείς (ως συνεχείς σε κλειστό διάστημα) αλλά δεν είναι Lipschitz συνεχείς γιατί
$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot x^{1-\frac{1}{n}}}$$ στο $(0,1)$ και

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{n \cdot x^{1-1/n}} = +\infty$, δηλ. f' όχι φραγμένη

<u>Η τεχνική του "κολλήματος"</u>

Έστω I, J διαστήματα <u>με κοινό άκρο β</u> και έστω $f: I \cup J \to \mathbb{R}$, ομοιόμορφα συνεχής στο I και J, τότε η f είναι ομ. συνεχής στο $I \cup J$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\varepsilon > 0$

(1) Υπάρχει $\delta_1 > 0$: αν $x, y \in I$ και $|x-y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$
(γιατί η $f: I \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής)

(2) Υπάρχει $\delta_2 > 0$: αν $x, y \in J$ και $|x-y| < \delta_2$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$
(γιατί η $f: J \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής)

Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$
Παίρνουμε $x, y \in I \cup J$ με $|x-y| < \delta$ και θέλω $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>1η περίπτωση</u>: $x,y \in I$ και $|x-y|<\delta \leq \delta_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$

<u>2η περίπτωση</u>: $x,y \in J$ και $|x-y|<\delta \leq \delta_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} |f(x)-f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

<u>3η περίπτωση</u>: $x<\beta<y$ και $|x-y|<\delta$

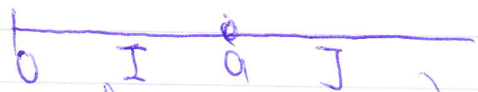
Παρατηρούμε ότι: ∘ $x,\beta \in I$ και $|\beta-x|<|y-x|<\delta \leq \delta_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(\beta)| < \varepsilon/2$

∘ $\beta,y \in J$ και $|\beta-y|<|y-x|<\delta \leq \delta_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(\beta)-f(y)| < \varepsilon/2$

Άρα $|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f(\beta)| + |f(\beta)-f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

<u>Εφαρμογή</u> (Άσκηση 12):

(α) Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\alpha>0$, η f είναι ομ. συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$.
Τότε η f είναι ομ. συνεχής στο $[0,+\infty)$.



$\xrightarrow{\text{ισοδύναμα}}$ f ομ. συνεχής στο $[0,+\infty)$.

η f είναι ομ. συνεχής στο $[0,\alpha]$.

f ομ. συν. στο J.

(β) Δείξτε ότι η $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ είναι ομ. συνεχής

<u>1ος τρόπος</u>: Η "$\sqrt{x}$" είναι ομ. συνεχής στο $[1,+\infty)$:
Πράγματι, $|f'(x)| = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{2}$ στο $[1,+\infty) \Rightarrow f$ Lipschitz στο $[1,+\infty) \Rightarrow$ ομ. συνεχής
Μετά, εφαρμόζουμε το (α).

<u>2ος τρόπος</u>: $|f(y)-f(x)| = |\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leq \sqrt{|y-x|} < \varepsilon$
αν $|y-x|<\delta=\varepsilon^2$