ΜΑΘΗΜΑ 12ο

Δυναμοσειρές

Δυναμοσειρά είναι μια σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$, $x \in \mathbb{R}$ (*)

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \right)$

Ερώτημα: Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η (*);
Συγκλίνει πάντα για $x=0$; το άθροισμα είναι a_0

→ Αργότερα θα δούμε ότι υπερβατικές συναρτήσεις όπως η e^x, η $\cos x$, η $\sin x$ αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές

(1) $e^x = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^k/k! + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$

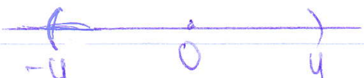
(2) $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6! + \dots$, $x \in \mathbb{R}$

(3) $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots$, $x \in \mathbb{R}$

Το σύνολο σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι το $\{x \in \mathbb{R} :$ η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει$\}$

Παρατηρήσεις: (1) Έστω ότι για κάποιο $y \neq 0$ η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot y^k$ συγκλίνει.
Ισχυρισμός: Αν $|x|<|y|$ τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ συγκλίνει απολύτως

Απόδειξη:
Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ συγκλίνει έχουμε



$a_k \cdot y^k \to 0$. Άρα $\exists k_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall k > k_0$ $|a_k \cdot y^k| < 1$

Έστω $|x|<|y|$ για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε

$|a_k x^k| = |a_k \cdot y^k| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^k < \left|\frac{x}{y}\right|^k$. Η $\sum_{k=k_0}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^k$ συγκλίνει (γεωμετρική με λόγο $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$)

Από κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{k=k_0}^{\infty}|a_k x^k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|a_k x^k|$ συγκλίνει

$\Rightarrow$ η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ συγκλίνει

(2) Αν η $\sum a_k \cdot y^k$ αποκλίνει και $|x|>|y|$ τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει

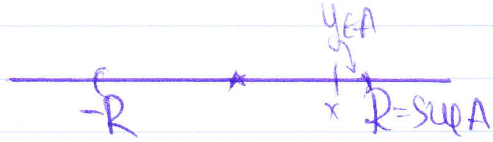
(Απόδειξη: Αν η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει, αφού $|y|<|x|$, η $\sum a_k y^k$ θα συνέκλινε από το (1))

Ορίζουμε $R = \sup\{\underbrace{|x| : \text{η } \sum a_k x^k \text{ συγκλίνει}}_{A}\}$

Έχουμε $A \neq \emptyset$ διότι $0 \in A$. Άρα, ο R ορίζεται και είναι ≥ 0 (ενδεχομένως $+\infty$ αν το R δεν είναι άνω φραγμένο)

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Το σύνολο σύγκλισης της $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ είναι το $(-R,R)$ με την προσθήκη ενδεχομένως των $-R, R$
(κάποιο από τα $(-R,R)$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R]$).

<u>Απόδειξη:</u>



• Αν $R=0$, η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει για $x=0 \Rightarrow$ Σύνολο σύγκλισης $=\{0\}$.

• Έστω $R>0$: (α) Έστω $x \in (-R,R)$. Αφού $|x|<R$ $\exists y \in A$: $|x|<y\leq R$ (χαρακτ. supremum)
Αφού $y \in A$, η $\sum a_k y^k$ συγκλίνει και $|x|<y \overset{(1)}{\Rightarrow}$ η $\sum a_k x^k$ συγκλίνει $\Rightarrow x \in A$
(β) Αν $|x|>R$ τότε $|x| > \underbrace{\sup A}_{R} \Rightarrow x \notin A \Rightarrow$ η $\sum a_k x^k$ αποκλίνει.

Το θέμα είναι πώς βρίσκουμε το R.
Γιατί τότε, από την Πρόταση, ξέρουμε το σύνολο σύγκλισης

Δύο κριτήρια :

(1) Αν $\sqrt[k]{|a_k|} \to a$ τότε $R = 1/a$. (κριτήριο ρίζας)

(2) Αν $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to a$ τότε $R = 1/a$ (κριτήριο λόγου)

Απόδειξη: (1) Αρκεί να δείξουμε ότι αν $|x| < 1/a$ τότε η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ συγκλίνει και ότι αν $|x| > 1/a$ τότε η $\sum a_k \cdot x^k$ συγκλίνει

• $|x| < 1/a$ / Εφαρμόζουμε κριτήριο ρίζας για την $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$

· $\sqrt[k]{|a_k \cdot x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| \to a \cdot |x| < 1$,
Άρα η σειρά συγκλίνει.

• $|x| > 1/a$ / • $\sqrt[k]{|a_k \cdot x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x| \to a|x| > 1$,
Άρα η σειρά αποκλίνει.

Άσκηση 19.

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k \cdot x^k$ / $a_k = k^k$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^k} = k \to +\infty$
$R = \dfrac{1}{+\infty} = 0$ / Σύνολο σύγκλισης $\{0\}$.

(β) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ / $a_k = \dfrac{1}{k!}$ / $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{k!}{(k+1)!} = \dfrac{1}{k+1} \to 0$ $R = \dfrac{1}{a} = +\infty$. Συγκλίνει $\forall x$.

Τύπος Stirling : $k! = \left(\dfrac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k} \cdot e^{1 - \frac{1}{12k} + \frac{2}{37k^2} \cdots}$
φραγμένο

$\sqrt[k]{k!} = \dfrac{k}{e} \cdot \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[k]{2\pi k}} \cdot \underset{\downarrow \atop 1}{\sqrt[k]{\text{"φρ"}}} \to k/e \to +\infty$

(γ) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k^2$ (J) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} \cdot x^k$ (χ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

(γ) $a_k = \frac{1}{k^2}$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} \longrightarrow 1 = a$ / $R=1$ Σύνολο σύγκλισης $[-1, 1]$

(J) $a_k = \frac{k^3}{3^k}$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{k^3}}{3} \to \underset{a}{1/3}$ / $R=3$ $(-3, 3)$

(χ) $a_k = \frac{1}{k}$ / $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \longrightarrow 1 = a$ / $R=1$ $(-1, 1)$

(γ) Για $x=1$: $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

Για $x=-1$ $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ συγκλίνει

(J) $x=3$ / $\sum k^3 \to +\infty$

$x=-3$ / $\sum (-1)^k k^3$ } αποκλίνουν γιατί $k^3 \not\to 0$ και $(-1)^k k^3 \not\to 0$.

(χ) $x=1$: $\sum 1/k$ αποκλίνει

$x=-1$: $\sum (-1)^k/k$ συγκλίνει (Leibniz)

Ασκήσεις: Ε12 (η), (θ): Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \cdot k!}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k!}{k^k}$$

(Πιο γενικά: για ποιους $\alpha>0$ συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k \cdot k!}{k^k}$;)

Κριτήριο λόγου: $$\frac{\frac{\alpha^{k+1} \cdot (k+1)!}{k+1}}{\frac{\alpha^k \cdot k!}{k}} = \frac{\alpha^k \cdot \alpha \cdot k! (k+1) \cdot k^k}{\alpha^k \cdot k! (k+1)(k+1)^k} = \frac{\alpha}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{\alpha}{e}$$

- Για $\alpha=2$: $\frac{2}{e}<1$: η $\sum \frac{2^k k!}{k^k}$ συγκλίνει
- Για $\alpha=3$: $\frac{3}{e}>1$: — " — αποκλίνει

Τι γίνεται αν $\alpha=e$;

Έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k \cdot k!}{k^k}$

Ξέρουμε ότι $\frac{k!}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k}} \to e$. (Το θεωρώ γνωστό/Stirling)

Άρα $$\frac{e^k \cdot k!}{k^k} = \frac{k!}{\left(\frac{k}{e}\right)^k} = \frac{k!}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k}} \cdot \sqrt{2\pi k} \longrightarrow +\infty$$

Δηλαδή $\frac{e^k \cdot k!}{k^k} \to +\infty$

$\Downarrow$

η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k \cdot k!}{k^k}$ συγκλίνει.

(Ε21) Έστω (a_n) ακολ.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+1}-a_n| \leq \frac{1}{n^2}$

ΝΔΟ: Η (a_n) συγκλίνει.

Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι βασική (άρα συγκλίνει)

Ιδέα: Αν κατάξουμε το $|a_n - a_m| = |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots$

$\dots + (a_{m+1} - a_m)| \leq$ (*)

$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_{m+1} - a_m| \leq \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}$

Έστω ε>0. Αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall n > m \geq n_0$: $|S_{n-1} - S_{m-1}| < \varepsilon$ (όπου $S_n = 1 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2$).
$(1 + 1/2^2 + \ldots + 1/(n-1)^2 - (1 + 1/2^2 + \ldots + 1/(m-1)^2)$ (⋆⋆)

$$\parallel$$

$$1/m^2 + \ldots + 1/(n-1)^2$$

Τότε από την (⋆) $\forall n > m \geq n_0$ έχουμε (⋆⋆)
$|a_n - a_m| \leq 1/m^2 + \ldots + 1/(n-1)^2 < \varepsilon$

Άρα η (a_n) είναι βασική

⋆⋆⋆ E25 Έστω $a_k > 0$ με $a_k \to 0$. ΝΔΟ: $\exists (a_{s_k})$ υπακολουθία της (a_k):
η $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot a_{s_k}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Θα βρούμε φυσικούς οι οποίοι να αυξάνουν γνήσια (επαγωγικά) $S_1 < S_2 < \ldots < S_k < S_{k+1} < \ldots$
ώστε $\forall k$: $3^k \cdot a_{s_k} < 1/k^2$ ①

Τότε, αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από κριτήριο σύγκρισης και η $\sum 3^k \cdot a_{s_k}$ συγκλίνει.

Άρα ① $\iff a_{s_k} < \frac{1}{3^k \cdot k^2}$.

ΒΗΜΑ 1º: Αφού $a_k \to 0$ $\exists S_1 \in \mathbb{N}$: $a_{s_1} < \frac{1}{3^1 1^2} = \frac{1}{3}$

ΒΗΜΑ 2º: Ζητάμε $S_2 > S_1$ με $a_{s_2} < \frac{1}{3^2 2^2} = \frac{1}{36}$

Αφού $a_k \to 0$ όλοι τελικά οι a_k θα είναι $< \frac{1}{36}$
Άρα μπορώ να βρω $S_2 > S_1$ με $a_{s_2} < 1/36$

Γενικά, αν βρω $S_1 < S_2 < \ldots < S_n$ με $a_{s_k} < \frac{1}{3^k \cdot k^2}$, $k = 1, \ldots, n$
ξέρω ότι όλοι τελικά οι $a_k < \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}$ γιατί $a_k \to 0$

~~Τότε από την (*) υπαρχουν έχουμε~~

~~$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{m^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} < \varepsilon$~~

άρα μπορούμε να βρούμε $s_{n+1} > s_n$ ώστε $a_{s_{n+1}} < \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^2}$.

(3.7) Έστω $a_k \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει

τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

Θα υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k$ συγκλίνει και

θδο η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Θέτω $\beta_k = k \cdot a_k$. Τότε το ζητούμενο γίνεται:

Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνει τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k}$ συγκλίνει

Αφού η $\sum \beta_k$ συγκλίνει, η ακολουθία $s_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$ των μερικών της αθροισμάτων είναι φραγμένη.

Επίσης $1/k \downarrow 0$.
Από το κριτήριο Dirichlet η $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \cdot \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{k}$ συγκλίνει

(Ε.19) Έστω $a_k > 0$ με $a_k \to a > 1$
Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει

Παίρνουμε $1 < \beta < a$. Αφού $a_k \to a > \beta$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$:
$\forall k \geq k_0$: $a_k > \beta$
$\Downarrow$
$\forall k \geq k_0$: $k^{a_k} > k^{\beta}$
$\Downarrow$
$\forall k \geq k_0$: $\frac{1}{k^{a_k}} < \frac{1}{k^{\beta}}$ Η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta}}$ συγκλίνει:
β-σειρά : το β
σταθερό με $\beta > 1$.

Από κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει.
οεδ