Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ασκήσεις 5.

1. Για κάθε μία από της παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το ανάπτυγμα Taylor που υποδεικνύεται:
$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos(e^x) & T_{3,f,0} \\ f(x)=e^{\cos x} & T_{3,f,0} \\ f(x)=e^{e^x} & T_{3,f,0} \\ f(x)=\sqrt[3]{x} & T_{n,f,1}\ ,\quad n\in\mathbf{N} \\ f(x)=x^2e^x & T_{n,f,0}\ ,\quad n\in\mathbf{N} \end{array}$$

2. Να βρεθεί η σειρά Taylor με κέντρο το μηδέν της $f(x)=\arctan(x)$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς;

3. Έστω f και g C^{m+1} φορές σε ένα διάστημα I και $x_0\in I$. Να δειχθεί ότι $T_{m,f,x_0}=T_{m,g,x_0}$ αν και μόνο αν
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^m}=0.$$

4. Να αποδειχθεί ότι
$$\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\geq 1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{36}\ ,\quad 0<|x|<\frac{\pi}{2}.$$

5. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Να δειχθεί ότι αν υπάρχει $M>0$ ώστε $|f^{(n)}(x)|\leq M^n$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $n\in\mathbf{N}$, τότε η σειρά Taylor της f με οποιοδήποτε κέντρο $a\in\mathbf{R}$ συγκλίνει στην $f(x)$.

6. (α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,g,0}$ της συνάρτησης
$$g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\ .$$
(β) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το $T_{4,g,0}$ βρείτε μία προσέγγιση για το $\int_0^1 e^{-t^2}dt$ και εκτιμείστε το αντίστοιχο σφάλμα.

7. Έστω $n\geq 2$ και $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ με $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1}(x_0)$ και $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Δείξτε ότι: (i) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. (ii) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0)<0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. (iii) Αν ο n είναι περιττός τότε το x_0 δεν είναι τοπικό ακρότατο αλλά σημείο καμπής της f.

8. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=8x^5-15x^4+10x^2$.

9. Να εξεταστεί τι είδους κρίσιμο σημείο είναι το μηδέν για τις συναρτήσεις
$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}\ ,\qquad g(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}$$

10. Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
(α) Να δειχθεί ότι η f είναι άπειρες φορές διαφορίσιμη στο 0 με $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. (β) Ποιο είναι το διάστημα σύγκλισης της σειράς Taylor της f με κέντρο το μηδέν; (γ) Για ποια x στο διάστημα σύγκλισης το άθροισμα της σειράς Taylor ισούται με $f(x)$;

11. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor β′ βαθμού, βρείτε μια προσέγγιση για το $\sqrt{25,2}$. Δείξτε ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι μικρότερο από $1,6 \cdot 10^{-7}$.

12. Έστω $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη με $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε
$$|f''(\xi)| \geq \frac{4|f(\beta) - f(\alpha)|}{(\beta - \alpha)^2}.$$

13. (i) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor βρείτε μία προσέγγιση για το $e^{0.02}$ με σφάλμα μικρότερο από 10^{-8}. (ii) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor βρείτε μία προσέγγιση για το $\sin(1/2)$ με σφάλμα μικρότερο από 10^{-20}.

14. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο πολυώνυμο Taylor βρείτε μία προσέγγιση για το
$$\int_0^1 \sin(t^2)dt \,,$$
με σφάλμα μικρότερο από 10^{-5}.