Απειροστικός Λογισμός ΙΙ - Ασκήσεις 4.

Α. Το ολοκλήρωμα Riemann

1. Έστω f φραγμένη συνάρτηση στο $[0,1]$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,b]$ για κάθε $0<b<1$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

2. Έστω $f,g,h:[a,b]\to \mathbf{R}$ συναρτήσεις με $f(x)\le g(x)\le h(x)$, $x\in[a,b]$. Να δειχθεί ότι αν οι f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=\int_a^b h$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b g=\int_a^b f=\int_a^b h$.

3. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ τέτοια ώστε $f(q)=0$ για κάθε $q\in[a,b]\cap\mathbf{Q}$. Να δειχθεί ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $\int_a^b f=0$.

4. (i) Έστω f συνεχής μη-αρνητική συνάρτηση στο $[a,b]$. Να δειχθεί ότι αν $\int_a^b f(x)dx=0$, τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν στο $[a,b]$. Ισχύει το συμπέρασμα αν παραλειφθεί η υπόθεση της συνέχειας; (ii) Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

5. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$. (i) Να δειχθεί ότι αν $\int_a^b fg\,dx=0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση g, τότε $f=0$ στο $[a,b]$. (ii) Να δειχθεί ότι αν $\int_a^b fg\,dx=0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση g με $g(a)=g(b)=0$, τότε $f=0$ στο $[a,b]$. (iii) Να δειχθεί ότι αν $\int_a^b fg\,dx=0$ για κάθε συνεχή συνάρτηση g για την οποία υπάρχει $\delta>0$ ώστε $g(x)=0$ για $x\in[a,a+\delta]\cup[b-\delta,b]$, τότε $f=0$ στο $[a,b]$.

6. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\displaystyle\int_1^n\frac{dx}{x}$ συγκλίνει.

7. Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a,b]$ και g συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$ εκτός από ένα σημείο $x_0\in[a,b]$. Να δειχθεί ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b f=\int_a^b g$.

8. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq\dfrac{1}{n}, n\in\mathbf{N},\\ 1, & x=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbf{N}.\end{cases}$$
είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

9. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες
$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\,,\qquad b_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}.$$

10. Έστω $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ για κάθε $x,y\in[0,1]$. Να δειχθεί ότι
$$\Big|\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\Big|\leq\frac{M}{2n}.$$

11. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχής, μη-αρνητική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι
$$\lim\Big(\int_a^b f(x)^n dx\Big)^{1/n}=\max\{f(x)\ :a\leq x\leq b\}.$$

B. Τα θεμελιώδη θεωρήματα

1. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Αν ισχύει
$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,\qquad \text{για κάθε } x\in[a,b],$$
έπεται απαραίτητα ότι $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[a,b]$;

2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση στο και $g:[a,b]\to[a,b]$ παραγωγίσιμη. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης
$$h(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt\,.$$

3. Έστω $g:[0,1]\to[0,1]$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης
$$f(x)=\int_{g(x)}^{g(x^2)} g(t)dt\ .$$

4. Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι
$$|f(x)|\leq\Big(\int_0^1 f'(t)^2dt\Big)^{1/2}\ ,\qquad \text{για κάθε } x\in[0,1]\,.$$

5. Έστω f συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Να δειχθεί ότι
$$\int_a^b f(x)\cos(nx)dx\longrightarrow 0\,.$$

6. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x+y)=f(x)f(y)$, $x,y\in\mathbf{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\alpha\in\mathbf{R}$ ώστε $f(x)=\exp(\alpha x)$, $x\in\mathbf{R}$.

7. Έστω
$$f(x)=\log x+\int_0^1\frac{dt}{(x^4+t^4)^{1/4}}\quad ,\quad x>0.$$
Είναι η f μονότονη; Είναι η f άνω ή κάτω φραγμένη;

Γ. Τεχνικές ολοκλήρωσης

1. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

$$\int e^{2x}\cos x\,dx \qquad \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \int \frac{1}{e^x+e^{3x}}dx$$

$$\int \frac{3x-1}{x^4+5x^2+4}dx \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx \qquad \int \sin(2x)\cos^4 x\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} \qquad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \qquad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx \qquad \int \frac{x^3+x+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx \qquad \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$$

2. Να βρεθούν αναδρομικοί τύποι για τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$I_n = \int (\log x)^n dx\ , \qquad J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\ , \qquad K_n = \int \cos^n x\,dx\,.$$

Δ. Γενικευμένα ολοκληρώματα

1. Να υπολογιστούν, εφόσον υπάρχουν, τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\ , \qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\infty} xe^{-x}dx$$

2. Να εξεταστεί αν συγκλίνουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+x+1}}{x^4+x+2}\ , \qquad \int_{\pi}^{\infty} \cos(x^2)dx\ .$$

3. Έστω $f : [1,\infty) \to \mathbf{R}$ συνεχής, φθίνουσα, θετική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^\infty f(x)dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ συγκλίνει.

4. Να βρεθεί για ποια $\alpha \in \mathbf{R}$ υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \Big(\frac{x}{x^2+1} - \frac{\alpha}{x+2}\Big)dx$$

5. Ορίστε (ή εξηγείστε γιατί υπάρχει) μία συνεχή θετική συνάρτηση f στο $[0,\infty)$ ώστε το $\int_0^\infty f(x)dx$ να υπάρχει αλλά η f να μην είναι φραγμένη.

6. Έστω $f(x)$ θετική συνάρτηση στο $[0,+\infty)$ με $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{1}{n}\int_0^n xf(x)dx \longrightarrow 0\,.$$