Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Απειροστικός Λογισμός ΙΙ 23 Ιουνίου 2023

Συνοπτικές λύσεις

1. (α) Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, απαντήσετε με πλήρη αιτιολόγηση αν είναι σωστή ή λάθος.

(i) Αν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz, τότε και το γινόμενο fg είναι κι αυτό Lipschitz

(ii) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $b_n \to 0$ τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Λύση. (i) Λάθος: η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι Lipschitz αλλά η $f^2(x) = x^2$ δεν είναι.

(ii) Λάθος: Έστω $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (κριτήριο Leibniz), ισχύει $a_n \to 0$, όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ αποκλίνει.

(β) Έστω δύο φραγμένες ακολουθίες (a_n), (b_n). Να δειχθεί ότι αν $\lim a_n = a$ και $\limsup b_n = b$, τότε $\limsup(a_n + b_n) = a + b$.

Λύση. Έστω $\gamma = \limsup(a_n + b_n)$. Το γ είναι οριακό σημείο της $(a_n + b_n)$, άρα υπάρχει υπακολουθία της $(a_n + b_n)$ ώστε

$$a_{k_n} + b_{k_n} \to \gamma.$$

Άρα

$$b_{k_n} = (a_{k_n} + b_{k_n}) - a_{k_n} \to \gamma - a$$

Έπεται ότι $\gamma - a \leq b$, δηλαδή $\gamma \leq a + b$.

Για την αντίστροφη ανισότητα ενεργούμε παρόμοια: έστω (b_{j_n}) τέτοια ώστε $b_{j_n} \to b$. Τότε

$$a_{j_n} + b_{j_n} \to a + b$$

άρα $a + b \leq \limsup(a_n + b_n)$.

2. (α) Να εξεταστεί αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n + \sqrt{n+2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Λύση. Ισχύει

$$\lim \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Ορίζουμε λοιπόν

$$b_n = \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}.$$

Ισχύει τότε $a_n/b_n \to 1$. Αφού η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, έπεται από το οριακό κριτήριο σύγκλισης ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(β) Να δειχθεί ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στοιχείων του A ισχύει ότι αν $x_n - y_n \to 0$ τότε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Λύση. Θεωρία.

3. (α) Να εξεταστεί εάν η συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ζητείται πλήρης αιτιολόγηση).

Λύση. Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν ορίσουμε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{n\pi}\ , \qquad y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

τότε $y_n - x_n \to 0$ και $\lim(f(y_n) - f(x_n)) = 1$.

(β) Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx \ , \qquad \int x \arctan x \, dx$$

Λύση. (i) Έχουμε

$$\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$$

και άρα

$$\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + c$$

(ii) Με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int x \arctan x \, dx = \int (\frac{x^2}{2})' \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + c$$

4. (α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ ρητός,} \\ x, & \text{αν } x \text{ άρρητος,} \end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση. Έστω

$$P = \{0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = 1\}$$

μία διαμέριση του $[0,1]$. Ισχύει $m_k(f,P) = 0$ για κάθε k και άρα $L(f,P) = 0$. Επίσης, σε κάθε διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει άρρητος α_k τέτοιος ώστε $\alpha_k \geq (x_k + x_{k+1})/2$. Άρα

$$M_k(f,P) \geq f(\alpha_k) = \alpha_k \geq \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Συνεπώς

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(f,P)(x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}$$

Από το κριτήριο Riemann έπεται ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Να βρεθούν τα liminf και limsup για την ακολουθία

$$a_n = \sqrt[n]{n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

(Ζητείται πλήρης αιτιολόγηση)

Λύση. Ισχύει

$$a_{4k} = 0, \quad a_{4k+1} = \sqrt[4k+1]{4k+1} \to 1, \quad a_{4k+2} = 0, \quad a_{4k+3} = -\sqrt[4k+3]{4k+3} \to -1.$$

Επειδή κάθε όρος της (a_n) εμφανίζεται σε κάποια από τις παραπάνω υπακολουθίες, έπεται ότι τα οριακά σημεία της (a_n) είναι τα -1, 0 ,1. Άρα $\liminf a_n = -1$ και $\limsup a_n = 1$.

5. (α) Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για κάθε $x \in (-R,R)$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to 0$ και $f(x_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση. [*Υπόδειξη.* Δείξτε ότι $f(x) = xg(x)$ όπου η g επίσης αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο $(-R,R)$.]

Λύση. Αφού η f είναι άθροισμα συγκλίνουσας δυναμοσειράς, είναι συνεχής στο $(-R,R)$. Ειδικότερα, είναι συνεχής στο 0. Άρα $f(0)=\lim f(x_n)=0$. Όμως $f(0)=a_0$, άρα $a_0=0$. Άρα

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$$

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$ έχει το ίδιο διάστημα σύγκλισης με την αρχική δυναμοσειρά. Θέτουμε

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n\ , \quad x\in(-R,R).$$

Ισχύει τότε $f(x)=xg(x)$. Άρα $g(x_n)=0$ για κάθε n. Εφαρμόζουμε τα προηγούμενα στη συνάρτηση g και παίρνουμε ότι $a_1=0$. Συνεχίζοντας κατ΄ αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι όλοι η συντελεστές της αρχικής σειράς είναι ίσοι με μηδέν.

(β) Να υπολογιστεί, εφόσον υπάρχει, το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx\,.$$

Λύση. Με παραγοντική ολοκλήρωση βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+c$$

Συνεπώς για κάθε $M>0$ ισχύει

$$\int_0^{M} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-M}}{2}(\sin M-\cos M)+\frac{1}{2}$$

και άρα, αφού $e^{-M}\to 0$ καθώς $M\to+\infty$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει και

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}.$$