Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου - 12-09-2022

Θέμα 1ο.

Εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(α) Αν η ακολουθία (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(β) Αν η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η ακολουθία (x_n) στο $(0, +\infty)$ είναι βασική, τότε η ακολουθία $(f(x_n))$ είναι επίσης βασική.

(γ) Για οποιεσδήποτε φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών (a_n), (b_n) ισχύει $\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$.

Θέμα 2ο.

(α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^2 .$$

(β)(i) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας (γ_n) με την ιδιότητα $\lim_{n\to+\infty}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) = 0$, αλλά η ακολουθία (γ_n) αποκλίνει.

(ii) Αποδείξτε ότι αν για την ακολουθία (a_n) ισχύει $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία (a_n) συγκλίνει.

Θέμα 3ο.

(α) Εξετάστε αν καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχής:

(i) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}\ln x$, (ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sin(x^2)$

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(n) \ge 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = +\infty.$$

Θέμα 4ο.

(α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}dx, \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

(β) Υπολογίστε τη σειρά Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ -1 < x < 1 .$$

(*Υπόδειξη:* Θεωρήστε γνωστή τη σειρά Taylor της συνάρτησης $g(x) = \ln(1 + x)$.)

Να γράψετε και τα τέσσερα θέματα.

Καλή Επιτυχία