Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 2ο Κλιμάκιο
23 Ιουνίου 2021

1. (1 μον.) Έστω $(x_n), (y_n)$ φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $y_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\liminf y_n > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \leqslant \frac{\limsup x_n}{\liminf y_n}.$$

2. (1.5+1.5 μον.) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και $a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ii) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k}\right)^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k.$$

3. (1.5 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Υπάρχει ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι φραγμένη.

(ii) Υπάρχει φραγμένη συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(xt)dt = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int (\ln x)^2 dx, \qquad \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} dx.$$

5. (1+2 μον.) (α) Βρείτε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 της συνάρτησης $g(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt$ και υπολογίστε την $g^{(n)}(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(1) = 0$ και ότι η f' είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant 2\sqrt{\int_0^1 t^2 f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}.$$

[*Υπόδειξη:* Ολοκλήρωση κατά μέρη στο αριστερό μέλος της ανισότητας.]