Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 1ο Κλιμάκιο
23 Ιουνίου 2021

1. (1 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}| < +\infty$.

2. (1.5+1.5 μον.) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας).

(i) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ii) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και $k^2 a_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

3. (1.5 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν η $f : (0,3) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,2)$ και στο $(1,3)$ τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,3)$.

(ii) Αν η συνεχής συνάρτηση $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[k, k+1]$ για κάθε $k \geqslant 0$, τότε η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

4. (1+1.5 μον.) (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ τέτοια ώστε

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int x \sin^2 x \, dx, \qquad \int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 1} dx.$$

5. (1+2 μον.) (α) Βρείτε τις παραγώγους κάθε τάξης στο 0 της συνάρτησης $g(x) = xe^{x^2}$.

(β) Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x^2}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(k+1) - f(k)|$ συγκλίνει.

(ii) Η f είναι φραγμένη.