Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Εξέταση Περιόδου Σεπτεμβρίου 2019-20 (2/9/2020)
1ο Κλιμάκιο

Οδηγίες

Α. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.

Β. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.**

Θέμα 1ο ($4 \times 0,9 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{k!}$, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^4+1} - k^2 \right) \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(γ) Δίνεται ακολουθία (a_n) με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$\limsup a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim a_n = 0 \ .$$

Θέμα 2ο ($1,4 + 1 + 1,2 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
(*Διευκρίνιση*: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη κριτήρια που σας είναι γνωστά είτε από τη θεωρία είτε από θεωρητικές ασκήσεις, αρκεί να τα διατυπώσετε με σαφήνεια.)

(ii) Για οποιοδήποτε $a > 0$, η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0, a]$.

(β) (*Θεωρία*) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή η συνάρτηση F με $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$, είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$.

Θέμα 3ο ($1,2 + 1 + 1,4 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τον άξονα των x, την καμπύλη $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ και τις ευθείες $x = 1/2$ και $x = 1$.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \cos^3 x dx$.

(γ) Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Θέμα 4ο ($1,8 + 1,8 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Δίνεται συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) dx = 0$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$. Δείξτε ότι η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε το ανάπτυγμά της.

Καλή Επιτυχία

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
Εξέταση Περιόδου Σεπτεμβρίου 2019-20 (2/9/2020)
2ο Κλιμάκιο

Οδηγίες

Α. Διάρκεια εξέτασης: **90 λεπτά**.

Β. **Να απαντήσετε σε 3 από τα 4 θέματα.**

Θέμα 1ο ($4 \times 0,9 = 3,6$ Μονάδες)
(α) (i) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$\text{(i)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{k} \qquad \text{(iii)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{k}\right)$$

(β) Δίνεται φραγμένη ακολουθία (a_n) και έστω $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι $\limsup a_n \leq s$.

Θέμα 2ο ($1,8 + 0,6 + 1,2 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$. Εξετάστε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, +\infty)$.
(*Διευκρίνιση*: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε χωρίς απόδειξη κριτήρια που σας είναι γνωστά είτε από τη θεωρία είτε από θεωρητικές ασκήσεις, αρκεί να τα διατυπώσετε με σαφήνεια.)

(β) (i) Δώστε παράδειγμα ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, με τις εξής ιδιότητες: Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, υπάρχει $y \in [0, 1]$ με $f(y) > 0$ και $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τις παραπάνω ιδιότητες.

Θέμα 3ο ($1,2 + 1 + 1,4 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τον άξονα των x, την καμπύλη $y = \frac{1}{x^2+5x+4}$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 3$.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

(γ) Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$$

για τις διάφορες τιμές του $p > 0$.

Θέμα 4ο ($1 + 0,8 + 1,8 = 3,6$ Μονάδες)
(α) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με την ιδιότητα ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\text{(i)} \ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = +\infty \quad \text{και} \quad \text{(ii)} \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \alpha$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, αν $x \neq 0$ και $f(0) = \frac{1}{2}$. Δείξτε ότι η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 σε όλο το $\mathbb{R}$ και βρείτε το ανάπτυγμά της.

Καλή Επιτυχία