ΑΠΕΙΡ. ΛΟΓ. ΙΙ 11-9-2019

Θέμα 1ο: α) Δίδεται ακολ. (a_n) με $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ και $a_n \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολ. (a_{k_n}) της (a_n) ώστε

$$n a_{k_n} \to 0.$$

β) Δίδονται οι (x_n) και (y_n) φραγμένες ακολουθίες με $x_n \to x$. Να αποδειχθεί ότι

$$\limsup(x_n+y_n) = x + \limsup y_n$$

Θέμα 2ο: α) Να εξετασθεί κατά πόσον συγκλίνει απλά και απόλυτα η σειρά

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{19} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3}$$

β) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση την σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$.

γ) Να εξετασθεί ως προς την σύγκλιση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$.

Θέμα 3ο: α) Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n}, \quad n \geq 1.$$

[Υπόδ. $\lim a_n = \int_0^1 e^x dx$.].

β) Δίδεται η συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall x,y \in [0,1]$, όπου $M>0$ θετική σταθερά. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{M}{2}.$$

Θέμα 4ο: α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. [Υπόδ. Εξετάστε για δοθέν $\delta>0$, το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} |(x+\delta)^n - x^n|$]

β) Υπολογίστε τα όρια, $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_1^a (x-1)e^{-x}dx$ και $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_0^a x e^{-x}dx$,

Θέμα 5ο: α) Έστω $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^{n-1} f(x)\,dx = f(1).$$

β) Έστω $g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = b > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b g(x)\,dx = +\infty. \quad \left(\text{Δηλ. } \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty\right)$$

* Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2,5 μονάδες