ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Εξέτασης 26/06/2019

Θ1. (α) Παρατηρούμε ότι $\frac{2n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 3k$. Θεωρούμε τις υπακολουθίες

$$\begin{aligned}
a_{3k} &= \sin\frac{2(3k)\pi}{3} = \sin(2k\pi) = 0 \to 0,\\
a_{3k+1} &= \sin\frac{2(3k+1)\pi}{3} = \sin(2k\pi + \frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\sqrt{3}}{2},\\
a_{3k+2} &= \sin\frac{2(3k+2)\pi}{3} = \sin(2k\pi + \frac{4\pi}{3}) = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Επειδή οι υπακολουθίες (a_{3k}), (a_{3k+1}), (a_{3k+2}) περιλαμβάνουν όλους τους όρους της (a_n), έχουμε ότι $K = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ και $\liminf a_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\limsup a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

[*Η απόδειξη ότι το K δεν περιέχει άλλα στοιχεία περιλαμβάνεται και βαθμολογείται στο Θ1(β).*]

(β) Ένα $x \in \mathbb{R}$ λέγεται οριακό σημείο μιας ακολουθίας (a_n), αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) με $a_{k_n} \to x$. Άρα, εξ ορισμού, $\{\alpha, \beta\} \subseteq K$.

Έστω $x \in K$. Τότε υπάρχει (a_{k_n}) με $a_{k_n} \to x$. Η (a_{k_n}) έχει άπειρους δείκτες κοινούς με τουλάχιστον μία από τις υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}), έστω την (a_{2n}). Αυτοί οι κοινοί δείκτες ορίζουν υπακολουθία $(a_{k_{l_n}})$ και της (a_{k_n}) και της (a_{2n}). Άρα $a_{k_{l_n}} \to x$ και $a_{k_{l_n}} \to \alpha$. Από το μονοσήμαντο του ορίου $\alpha = x$.

Ομοίως, αν η (a_{k_n}) έχει άπειρους δείκτες κοινούς με την (a_{2n-1}), τότε $x = \beta$.

Σε κάθε περίπτωση, $x \in \{\alpha, \beta\}$ και $K = \{\alpha, \beta\}$.

Θ2. (α) Αφού f Lipschitz-συνεχής, υπάρχει $K > 0$ σταθερά με

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon/K$. Τότε, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$, είναι

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta = \varepsilon,$$

άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) ($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι (παραγωγίσιμη και) Lipschitz-συνεχής, με σταθερά $K > 0$. Θεωρούμε τυχόν $\xi \in \mathbb{R}$. Τότε

$$|f'(\xi)| = \left|\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}\right| = \lim_{x\to\xi} \frac{|f(x) - f(\xi)|}{|x - \xi|} \leq \lim_{x\to\xi} \frac{K|x - \xi|}{|x - \xi|} = K$$

και η f' είναι φραγμένη.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν $x \neq y$, από το ΘΜΤ του ΔΛ, υπάρχει ξ μεταξύ των x και y, με $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, άρα

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq K|x - y|,$$

και η f είναι Lipschitz-συνεχής.

(γ) Έστω $x_n = \log(2n\pi)$ και $y_n = \log(2n\pi + \frac{\pi}{2})$. Τότε

$$x_n - y_n = \log(2n\pi) - \log(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \log\frac{2n\pi}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to \log 1 = 0,$$

ενώ

$$f(x_n) - f(y_n) = \sin(2n\pi) - \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 - 1 \to -1,$$

άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Θ3. (α) Γνωρίζουμε ότι για $n \geq 3$, $(\sqrt[n]{n}) \downarrow$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$. Άρα $(\beta_n) = (\sqrt[n]{n} - 1) \downarrow$ για $n \geq 3$ και $\beta_n \to 0$.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της (α_n) είναι φραγμένη. Από το κριτήριο Diriclet η $\sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει. Επειδή η σύγκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται αν προσθέσουμε ένα πεπερασμένο πλήθος αρχικών όρων στην ακολουθία, η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ συγκλίνει. Άρα και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sqrt[n]{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [(\sqrt[n]{n} - 1) + 1] = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

συγκλίνει σαν άθροισμα σειρών που συγκλίνουν.

(β) Παρατηρούμε ότι $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ και για την $(b_n) = (1/n)$ έχουμε $b_1 = 1$ και $b_n \to 0$. Άρα

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m} (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{m+1} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$$

δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Επειδή $\frac{1}{n^2} < \frac{2}{n(n+1)}$, για $n \geq 2$, από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$ είναι $0 < 1/n < \pi/2$. Άρα

$$0 < 1 - \cos\frac{1}{n} = \frac{1 - \cos^2 \frac{1}{n}}{1 + \cos\frac{1}{n}} = \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{1 + \cos\frac{1}{n}} < \sin^2 \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Επειδή η $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει σαν αρμονική σειρά τάξης $p = 2 > 1$, από το κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{1}{n})$ συγκλίνει.

Θ4. Έστω $m \geq n$. Τότε

$$\begin{aligned} |\alpha_m - \alpha_n| &= \left| \int_n^m \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_n^m \frac{|\cos x|}{x^2} dx \leq \int_n^m \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_n^m \\ &= -\frac{1}{m} - (-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα που αποδείξαμε προκύπτει ότι η (α_n) είναι Cauchy, άρα συγκλίνουσα. Έστω $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$. Θέτουμε $b_n = \int_1^n \frac{\sin x}{x} dx$. Τότε,

$$\begin{aligned} b_n &= \int_1^n \frac{(-\cos x)'}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_1^n - \int_1^n (-\cos x) \cdot (1/x)' dx \\ &= -\frac{\cos n}{n} + \cos 1 - \int_1^n \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos n}{n} - \alpha_n. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\lim_{n\to\infty} bn = \lim_{n\to\infty}(\cos 1 - \frac{\cos n}{n}) - \lim_{n\to\infty} = \cos 1 - \alpha.$$
Ισχυριζόμαστε ότι το $\lim_{n\to\infty} bn = \cos 1 - \alpha$ συμπίπτει με το ΓΟ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $[x] \leq x < [x]+1$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x. Για $x > 1$, έχουμε
$$\begin{aligned}\left|\int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t}dt\right| &\leq \int_{[x]}^x \frac{|\sin t|}{t}dt \leq \int_{[x]}^x \frac{dt}{t} = [\log t]_{[x]}^x = \log x - \log[x] \\ &= \log\frac{x}{[x]} \leq \log\frac{x}{x-1}\end{aligned}$$
Άρα
$$\lim_{x\to\infty}\left|\int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t}dt\right| \leq \lim_{x\to\infty}\log\frac{x}{x-1} = \log 1 = 0$$
και
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt = \lim_{x\to\infty}\left(\int_1^{[x]}\frac{\sin t}{t}dt + \int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t}dt\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\sin t}{t}dt + \lim_{x\to\infty}\int_{[x]}^x \frac{\sin t}{t}dt = \cos 1 - \alpha + 0\end{aligned}$$

Επίσης, η συνάρτηση $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0,1]$ επεκτείνεται σε συνεχή στο $[0,1]$ με $g(0) = 1$, άρα το ΓΟ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ υπάρχει. Επομένως και το ΓΟ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ υπάρχει, και
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Θ5. (α) Παρατηρούμε ότι
$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{1-x}.$$
Για την γεωμετρική σειρά γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$, για $x \in (-1,1)$. Άρα
$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty (-x)^n - \sum_{n=0}^\infty x^n \\ &= \sum_{n=0}^\infty [(-1)^n - 1]x^n = -2\sum_{n=1}^\infty x^{2n-1}.\end{aligned}$$

(β) Για $x = 0$, η σειρά συγκλίνει. Για $x \neq 0$ θέτουμε
$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}x^{2n-1} \neq 0$$

και εφαρμόζουμε κριτήριο λόγου:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}|x|^{2n+1}}{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}|x|^{2n-1}} = \frac{n+1}{2n+1}x^2 \to \frac{1}{2}x^2.$$

Οπότε:

Αν $\frac{1}{2}x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}$, η σειρά συγκλίνει.

Αν $\frac{1}{2}x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{2}$, η σειρά αποκλίνει.

Άρα $R = \sqrt{2}$.

Θ6. (α) Θέτουμε $h = f - g$ και τότε

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b] \setminus \{x_o\} \\ f(x_o) - g(x_o) \neq 0, & x = x_o \end{cases}$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $h(x_o) > 0$. Πρέπει νδο η h είναι R-ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είναι 0. Αρκεί νδο η h είναι R-ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[a, x_o]$ και $[x_o, b]$ και τα επιμέρους ολοκληρώματα είναι 0.

Το δείχνουμε για το $[a, x_o]$, με $x_o \in (a, b]$: Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $c \in (a, x_o)$ με $x_o - c < \varepsilon/h(x_o)$ και θεωρούμε και την διαμέριση $P = \{a < c < x_o\}$ του $[a, x_o]$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 \leq U(h,P) - L(h,P) &= (M_0 - m_0)(c-a) + (M_1 - m_1)(x_o - c) \\ &= (0-0)(c-a) + (h(x_o) - 0)(x_o - c) = h(x_o)(x_o - c) < \varepsilon \end{aligned}$$

δηλ. ισχύει το κριτήριο Riemann για την h στο $[a, x_o]$. Επιπλέον, επειδή για κάθε διαμέριση Q του $[a, x_o]$ είναι $L(h,Q) = 0$, παίρνουμε

$$\int_a^{x_o} h(t)dt = \sup_Q L(h,Q) = 0.$$

(β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τα ΓΟ $\int_0^1 f(x)dx$ και $\int_1^2 f(x)dx$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \lim_{y\to 0^+} \int_y^1 f(x)dx = \lim_{y\to 0^+} \int_y^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{y\to 0^+} [4\sqrt[4]{x}]_y^1 \\ &= \lim_{y\to 0^+} (4 - 4\sqrt[4]{y}) = 4 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= \lim_{y\to 1^+} \int_y^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3}} = \lim_{y\to 1^+} [4\sqrt[4]{x-1}]_y^2 \\ &= \lim_{y\to 1^+} (4 - 4\sqrt[4]{y-1}) = 4. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 4 + 4 = 8.$$