Πανεπιστήμιο Αθηνών – Τμήμα Μαθηματικών
Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙ
10 Σεπτεμβρίου 2018

Θέμα 1 (α) **(0.2 μον.)** Διατυπώστε το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass.
(β) **(0.8 μον.)** Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει.
(γ) **(0.5 μον.)** Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι φραγμένο.
(δ) **(1 μον.)** Εάν μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία μπορεί $|a_n| \to a$ για κάποιο $a \in [0,\infty)$;
(ε) **(0.5 μον.)** Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών δείξτε ότι

$$\limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n.$$

Θέμα 2 (α) **(0.5 μον.)** Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με γενικό όρο $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει επίσης.
(β) **(1 μον.)** Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Αιτιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!\,\sqrt[n]{n}} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

(γ) **(1 μον.)** Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\liminf a_n > 1$. Δείξτε ότι τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a_n}}$$

συγκλίνει.

Θέμα 3 (2 μον.) (α) Αν $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις, είναι τότε και η fg αναγκαστικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση; Αιτιολογείστε πλήρως την απάντησή σας.
(β) Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί και $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $g\colon [b,+\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, με $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $h\colon [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } a \leq x \leq b \\ g(x) & \text{αν } x > b \end{cases}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4 (2 μον.) (α) Δείξτε ότι

$$n\ln n - n + 1 \leq \sum_{i=1}^{n} \ln i \leq (n+1)\ln n - n + 1.$$

[*Υπόδειξη*: Θεωρείστε το $\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x$ και τον ορισμό του ολοκληρώματος.]
(β) Έστω $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση και έστω ότι το όριο $I = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ υπάρχει και $I \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(1/n)}{n} = 0.$$

Θέμα 5 (2 μον.) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}, \qquad \int \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x, \qquad \int (x+1)\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

Θέμα 6 (1 μον.) (α) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ n-ου βαθμού γύρω από το μηδέν της συνάρτησης $f(x) = \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.
(β) Να βρεθεί η αριθμητική τιμή του $\cos^2(1/2)$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων και να αποδείξετε ότι όντως η απάντησή σας έχει ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων.

Καλή επιτυχία!