

Απειροστικός Λογισμός II

Εξέταση 17 Ιανουαρίου 2017

1. (α) Δείξτε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) συγκλίνει αν και μόνον αν οι υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

(β) Να βρεθούν τα οριακά σημεία των ακολουθιών (a_n) και (b_n) όπου $a_n = (\frac{-1}{3})^n$ και $b_n = (-1)^n + \frac{1}{3^n}$.

2. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ και $|y| < |x|$. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει. Αποδείξτε πλήρως ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ συγκλίνει.

(β) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \sin(n^2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^{n^2}}.$$

3. (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8}{8^n} x^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ και τις τιμές του x όπου οι δυναμοσειρές συγκλίνουν.

4. (α) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις:

(i) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

(ii) $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι αν η f' είναι φραγμένη, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

5. (α) Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς.

(i) Αν $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [a, b]$ και $\int_a^b f(t)dt = 0$, δείξτε ότι $f = 0$.

(ii) Αν $\int_c^d g(t)dt = 0$ για κάθε $[c, d] \subseteq [a, b]$, δείξτε ότι $g = 0$.

(β) Αν $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

εξετάστε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

6. (α) Αν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι η $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι συνεχής στο $[a, b]$.

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: $\int \frac{1}{1+x^3} dx$ και $\int x \cos^2 x dx$.

Να διατυπώνετε πλήρως τα θεωρήματα που χρησιμοποιείτε.

Να γραφούν **5 από τα 6** θέματα.

Οι απαντήσεις στα (1) (2) και (3) να γραφούν στην κόλλα **A**.

Οι απαντήσεις στα (4) (5) και (6) να γραφούν στην κόλλα **B**.

Καλή επιτυχία!