

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

4-2-2016

1. α) Να εξετασθούν ως προς την σύγκλιση οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{5n^3 - 8n^2 + n + 1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^{2n}}{4^{2n}}$$

- β) Αποδείξτε ότι,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 .$$

2. α) Έστω (s_n) ακολουθία πραγματικών έστω $|s_{n+1} - s_n| \leq \frac{1}{2^n} \quad n \geq 1$. Αποδείξτε ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy.

- β) Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a^n + b^n)x^n, \quad \text{όπου } 0 < a < b.$$

3. α) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις

(i) $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \in (0,1)$, (ii) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}, x \in (0,2)$ και

(iii) $f(x) = \frac{\cos x - \log(x+1)}{2 + \sin x}, x \in [0,1]$.

- β) θεωρούμε τα ην ακολουθία

$$(a_n) = (-1, \sqrt{2}, -1, \sqrt[3]{3}, -1, \sqrt{2}, -1, \sqrt[3]{3}, \dots, -1, \sqrt{2}, -1, \sqrt[3]{3}, \dots)$$
 η οποία

επαναλαμβάνεται σε κύκλους μήκους 4. Να βρεθούν το $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$.

4. Βρείτε τις σειρές Taylor κέντρου 0 για τις συναρτήσεις (i) $\cos x^2$ και (ii) $\cos^2 x$ και προσδιορίστε τα διαστήματα που συγκλίνουν.

5. α) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $u, v: I \rightarrow [a, b]$ διαφορίσιμες συναρτήσεις

στο διάστημα I . Αποδείξτε ότι, $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \cdot \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}, x \in I$.

- β) Υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων $g(x) = \int_{-x}^x e^t dt, x \in \mathbb{R}$ και

$$h(x) = \int_{\log x}^{x^2} \cos t dt, x > 0.$$

6. α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

- β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \arctan x dx$.

Γράψτε 5 θέματα.