Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – Τελική Εξέταση (8/6/2016)

1. (1.5 μονάδες) (α) (**Θεωρία**) Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $x = \limsup_n \alpha_n$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το πλήθος των όρων α_n που είναι μεγαλύτεροι από $x - \varepsilon$ είναι άπειρο και το πλήθος των όρων α_n που είναι μεγαλύτεροι από $x + \varepsilon$ είναι πεπερασμένο.
(β) Έστω (β_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|\beta_{n+1} - \beta_n| \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \geq 1$. Δώστε παράδειγμα το οποίο να δείχνει ότι η (β_n) δεν είναι απαραίτητα συγκλίνουσα. Αν όμως υποθέσουμε, επιπλέον, ότι η υπακολουθία (β_{2n}) της (β_n) συγκλίνει, τότε αποδείξτε ότι η (β_n) είναι συγκλίνουσα.

2. (3 μονάδες) (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \text{συν}\frac{1}{k}\right).$$

(β) Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει απολύτως.
(γ) Έστω (β_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε $\limsup_k \beta_k < 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k)$ συγκλίνει.

3. (1.5 μονάδες) (α) (**Θεωρία**) Έστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι Lipschitz συνεχής αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη συνάρτηση (δηλαδή, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x > 0$).
(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις $g, h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$g(x) = x^2 \text{ημ}\frac{1}{x} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \int_0^x (\text{τοξεφ}\, t)^2 \, dt.$$

4. (1.5 μονάδες) (α) Αποδείξτε πλήρως ότι η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \text{ημ}\frac{1}{x}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ είναι ολοκληρώσιμη.
(β) Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $a \leq \gamma < \delta \leq b$ τότε $\int_\gamma^\delta g(x)\, dx = 0$. Αποδείξτε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

5. (2.5 μονάδες) (α) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{e^x + e^{2x}}\, dx \qquad \text{και} \qquad \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\, dx.$$

(β) Προσδιορίστε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία

$$\int_1^\alpha \frac{1}{x^2 + 2x + 5}\, dx = \frac{\pi}{24}.$$

(γ) Έστω $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\, \text{ημ} x \, dx = 1 \qquad \text{και} \qquad f(\pi) = 2,$$

να βρεθεί η τιμή $f(0)$.

6. (2 μονάδες) (α) (**Θεωρία**) Αποδείξτε πλήρως ότι $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Αποδείξτε ότι $x^2 + \frac{x^6}{24} \leq e^{x^2/2} - e^{-x^2/2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(γ) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_x^\infty s e^{-s^2/2} ds = e^{-x^2/2} \qquad \text{και} \qquad \int_x^\infty e^{-s^2/2} ds \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

Καλή Επιτυχία!