Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – Ενδιάμεση Εξέταση (16/4/2016)

1. (α) Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $|\alpha_{n+1}-\alpha_n| \to 0$. Τότε, η (α_n) συγκλίνει.

(ii) Έστω (β_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $|\beta_{n+1}-\beta_n| \leq \frac{1}{3^n}$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, η (β_n) συγκλίνει.

(β) Έστω (x_n), (y_n) φραγμένες ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n \leq y_n$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n.$$

(γ) Έστω (z_n) φραγμένη ακολουθία η οποία δεν συγκλίνει. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a<b$ τέτοιοι ώστε: άπειροι όροι της (z_n) ικανοποιούν την $z_n < a$ και άπειροι όροι της (z_n) ικανοποιούν την $z_n > b$.

(3 μονάδες)

2. (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k \,\text{ημ}\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

(β) Έστω $(\alpha_k), (\beta_k)$ ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_k \beta_k}$ συγκλίνει.

(γ) Αποδείξτε ότι $1 \leq \sqrt[k]{k!} \leq k$ για κάθε $k \geq 1$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα να βρείτε όλους τους $x>0$ για τους οποίους συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt[k]{k!}}.$$

(3 μονάδες)

3. (α) Εξετάστε αν η συνάρτηση $g:(0,1) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}\ln x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) (Θεωρία) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) βασική ακολουθία στο A. Αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία.

(γ) Έστω A φραγμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in A$. [*Υπόδειξη:* Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε απαγωγή σε άτοπο και την πρόταση του προηγούμενου ερωτήματος.]

(3 μονάδες)

4. (α) (Θεωρία) Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει $y \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b-a).$$

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) Έστω $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_a^b g(x)dx > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[\gamma,\delta] \subseteq [a,b]$ τέτοιο ώστε $g(x)>0$ για κάθε $x \in [\gamma,\delta]$. [*Υπόδειξη:* Εξηγήστε πρώτα γιατί υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $L(g,P)>0$.]

(3 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!