Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – Ενδιάμεση Εξέταση (9/5/2015)

1. (α) Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία δεν συγκλίνει. Αποδείξτε πλήρως ότι η (α_n) έχει τουλάχιστον δύο υπακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

(β) Δίνεται η ακολουθία $\beta_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία της (β_n) και τα $\limsup \beta_n$, $\liminf \beta_n$.

(2 μονάδες)

2. (α) Έστω $p > 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

(β) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\text{ημ}\left(\frac{1}{k}\right).$$

(γ) Εξετάστε για ποιές τιμές του x συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k(1-x)}{k}$.

(3 μονάδες)

3. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(α) Έστω $(\alpha_k), (\beta_k)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Έστω (α_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$ συγκλίνει.

(2 μονάδες)

4. (α) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι: υπάρχουν $M, b > 0$ τέτοιοι ώστε $|f(x)| \leq Mx + b$ για κάθε $x \geq 0$.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις $g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

$$g(x) = x\text{ημ}x, \qquad h(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

(2 μονάδες)

5. (α) **(Θεωρία)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b-a).$$

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη.

(γ*) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta] \subseteq [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq \varepsilon$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$.

Είναι σωστό ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(y) = 0$; **(3 μονάδες)**

Καλή Επιτυχία!