Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 29/9/2014

1. (1.5 μονάδες) (α) Έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε πλήρως ότι: αν η (α_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε έχει υπακολουθία (α_{k_n}) η οποία τείνει στο $+\infty$.

(β) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) βασική ακολουθία στο A. Αποδείξτε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία.

2. (2.5 μονάδες) (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k^2+1}{k^3+1}\right)^2 \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}.$$

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς:

(i) $f : [2,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

(ii) $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}\ln x$.

3. (2 μονάδες) Έστω (α_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν $k^2\alpha_k \to 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $\limsup\limits_{k\to\infty}\alpha_k < 1$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^k$ συγκλίνει.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k)^2$ συγκλίνει.

4. (2 μονάδες) (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, αποδείξτε πλήρως ότι

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\left(\int_a^{x_0+t} f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds\right) = f(x_0).$$

5. (2 μονάδες) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\,dx, \qquad \int (x+1)\sqrt{x^2+1}\,dx, \qquad \int x^2\ln x\,dx.$$

6. (2 μονάδες) (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = f(1).$$

(β) Έστω $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b > 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx = +\infty.$$

Καλή Επιτυχία!