Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 1/2/2014

1. (α) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}| \leq 1/2$.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|a_{n+1} - a_n| \leq 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (a_n) είναι βασική.

(2 μονάδες)

2. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(1+1/k^2)}} \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k^k} \quad , \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}.$$

(2 μονάδες)

3. (α) Έστω (s_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{1/4}$, δηλαδή $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^{1/4}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\frac{1}{n^{1/4} s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/4} s_n^2}$ συγκλίνει.

(β) Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι οι σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$$

συγκλίνουν.

(2.5 μονάδες)

4. (α) Αποδείξτε ότι $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{(x^2+1)(x-1)^2} dx \quad \text{και} \quad \int x^3 \ln x dx.$$

(2.5 μονάδες)

5. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δηλαδή $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι η F είναι Lipschitz συνεχής.

(β) Έστω $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f' είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι:

$$|f(0) - f(1)| + |f(1) - f(2)| + |f(2) - f(3)| \leq \int_0^3 |f'(t)| dt.$$

(2 μονάδες)

6. (α) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις συναρτήσεις $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{1/3} \ln x$ και $g(x) = x^2 \sin x$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση (δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x) = f(x+T)$ για κάθε $x \geq 0$). Υποθέτουμε ότι:

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt < +\infty.$$

Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \geq 0$.

(2 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!