Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 20/4/2013

1. (α) Έστω (α_n) αύξουσα ακολουθία, η οποία έχει υπακολουθία (α_{k_n}) με $\alpha_{k_n} \to 2$. Δείξτε ότι η $\alpha_n \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και συμπεράνατε ότι $\alpha_n \to 2$.

(β) Δώστε παράδειγμα μη φραγμένης ακολουθίας η οποία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

(γ) Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Να βρεθούν όλα τα οριακά σημεία της (α_n) και τα $\limsup \alpha_n$, $\liminf \alpha_n$. Είναι η (α_n) βασική; **(2 μονάδες)**

2. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\log^2 k}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}.$$

(2 μονάδες)

3. Έστω (α_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\alpha_k}}{k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{k^2}$$

συγκλίνουν. **(2 μονάδες)**

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

1. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Συμπεράνατε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
2. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f(1/k^2)$ συγκλίνει. [*Υπόδειξη*: Εξηγήστε πρώτα γιατί $|f(x)| \leq x$ για κάθε $x > 0$.]

(2 μονάδες)

5. (α) Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0) = 0$ και

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \sin \frac{1}{x} \qquad (0 < x \leq 1)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμες. **(2 μονάδες)**

6. (α) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$|f(x)|^2 \leq x \int_0^x |f'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $x > 0$ υπάρχει μοναδικό $g(x) \in (0, x)$ ώστε

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = f(g(x)).$$

(2 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!