Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
4 Ιουλίου 2012

1. (2 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \to 1$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε

$$|a_{k_n} - 1| \leq \frac{1}{n^3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\gamma > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[\gamma, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Εφαρμογή: Δείξτε ότι η $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt[4]{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. (2 μον.) (α) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ αποκλίνει.

(β) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}.$$

3. (2 μον.) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(\sin k^2)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{\ln k} + \frac{1}{k}\right].$$

4. (2 μον.) (α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $\gamma \in (a, b)$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\gamma, b]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

(β) Ορίζουμε $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $g(x) = 0$ αλλιώς. Εξετάστε αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της (αν υπάρχει).

5. (2 μον.) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx, \qquad \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx, \qquad \int \sin(\ln x)\, dx.$$

6. (2 μον.) Έστω $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι:

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^3 f(x) \cos(nx) dx = 0$$

και

$$|f(2) - f(1)| + |f(3) - f(2)| \leq \int_1^3 |f'(x)|\, dx.$$

Καλή Επιτυχία!