Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙ
21 Σεπτεμβρίου 2005

1. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \le \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

2. (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\text{συν}(n^2)}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}\,\text{ημ}\frac{1}{n}$.

(β) Βρείτε το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}x^k$.

3. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντηση σας).
(α) Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ είναι ίση με 1.

4. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$ δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
(β) Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$.

5. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = xf(x).$$

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\text{συν}(nx)\,dx = 0.$$

[*Υπόδειξη:* Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.]

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \text{ημ}(\log x)\,dx \quad , \quad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$$

8. (α) Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια την $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\text{συν}x}{x^2+1}.$$

Να απαντήσετε και στα οκτώ θέματα, τα οποία είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας, κυκλώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε. Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία