Εξετάσεις Απειροστικού Λογισμού ΙΙ

6 Ιουνίου 2005 - Απαντήσεις

1. (α) Απροσδιόριστη μορφή: εξετάζουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$. Έχουμε πάλι απροσδιόριστη μορφή: εξετάζουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$. Άρα,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

(β1) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$: ο n-οστός όρος της σειράς είναι ο $a_n = ne^{-n} > 0$. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{n}}{e}\to\frac{1}{e}<1$. Άρα, η σειρά συγκλίνει.

(β2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$: ο n-οστός όρος της σειράς είναι ο $a_n=\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}>0$ (διότι, $\sin x < x$ στο $(0,1]$). Από το (α) έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{1}{6}.$$

Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά συμπεριφέρεται όμοια με την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Δηλαδή, συγκλίνει.

2. (α) Θέτουμε $u=\frac{x}{t}$. Τότε, $dt=-\frac{x}{u^2}du$ και

$$F(x)=\int_x^1 -x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du=\int_1^x x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du = x\int_1^x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$

Άρα,

$$F'(x)=\int_1^x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du + x\frac{\varphi(x)}{x^2}=\int_1^x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du+\frac{\varphi(x)}{x}.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ στο $[0,1]$ και τη διαμέριση $\mathcal{P}_n=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$, όπου $x_k=\frac{k}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$. Τότε,

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=U(f,\mathcal{P}_n)\to\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{2}{3}.$$

3. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\le M$ για κάθε $x\in[0,1]$. Έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $0<\alpha<1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η $2M\alpha<\frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha,1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[\alpha,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,Q)-L(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\{0\}\cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P)-L(f,P)=\alpha(M_0-m_0)+U(f,Q)-L(f,Q)<\alpha(M_0-m_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0=\sup\{f(x):0\le x\le\alpha\}\le M \quad \text{και} \quad m_0=\inf\{f(x):0\le x\le\alpha\}\ge -M.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0-m_0\le 2M$, άρα

$$U(f,P)-L(f,P)<2M\alpha+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

4. Για κάθε $i=1,\ldots,n$, η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $[t_{i-1},t_i]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

$$|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)\,dt\right|\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i}|f'(t)|\,dt.$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|f'(t)|\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}|f'(t)|\,dt.$$

5. (α) Η συνάρτηση $f(x)=x$ είναι κυρτή και ομοιόμορφα συνεχής, αφού $|f(x)-f(y)|\leq |x-y|$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (άλλη επιλογή: $f(x)=|x|$). Η συνάρτηση $g(x)=x^2$ είναι κυρτή, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής: αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $x_n=n+\frac{1}{n}$ και $y_n=n$, έχουμε $x_n-y_n=\frac{1}{n}\to 0$ αλλά $f(x_n)-f(y_n)=2+\frac{1}{n^2}\to 2\neq 0$.

(β) Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Υπάρχουν $x\neq y$ στο $\mathbb{R}$ με $f(x)<f(y)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $x<y$: Έστω $z>y$. Τότε,

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y},$$

δηλαδή

$$f(z)\geq A(z):=f(y)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-y).$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>0$, άρα $\lim\limits_{z\to+\infty}A(z)=+\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη.

2. $y<x$: Έστω $z<y$. Τότε,

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y},$$

δηλαδή

$$f(z)\geq B(z):=f(y)-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}(y-z).$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$, άρα $\lim\limits_{z\to-\infty}B(z)=+\infty$. Έπεται ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη.

6. Αν μια συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί την

$$(*)\qquad g(x)=1+\int_0^x g(t)\,dt$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι διαφορίσιμη (το δεξιό μέλος είναι διαφορίσιμη συνάρτηση) και $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης, $g(0)=1$.

Θεωρούμε την $f(x)=e^{-x}g(x)$. Τότε, $f'(x)=e^{-x}(g'(x)-g(x))=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα, η f είναι σταθερή. Δηλαδή, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=ce^x$. Αφού $g(0)=1$, βλέπουμε ότι $g(x)=e^x$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η e^x ικανοποιεί την $(*)$.

7. (α) Για το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx$ θέτουμε $\sqrt{1+x^2}=x-t$. Τότε, $x=\frac{t^2-1}{2t}$ απ' όπου παίρνουμε $dx=\frac{t^2+1}{2t^2}dt$ και $x+\sqrt{1+x^2}=2x-t=-\frac{1}{t}$. Υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{-\frac{1}{t}}\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt &= -\frac{1}{2}\int (t+\frac{1}{t})\,dt = -\frac{t^2}{4}-\frac{\log t}{2}+c\\ &= -\frac{(x-\sqrt{1+x^2})^2}{4}-\frac{\log\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}{2}+c.\end{aligned}$$

(β) Για το $\int \log(\text{εφ}x)/\text{ημ}^2x\,dx$ εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned}\int \frac{\log(\text{εφ}x)}{\text{ημ}^2x}\,dx &= \int(-\text{σφ}x)'\log(\text{εφ}x)\,dx\\ &= -\text{σφ}x\cdot\log(\text{εφ}x)+\int \text{σφ}x\frac{1/\text{συν}^2x}{\text{εφ}x}\,dx\\ &= -\text{σφ}x\cdot\log(\text{εφ}x)+\int \frac{\text{σφ}^2x}{\text{συν}^2x}\,dx\\ &= -\text{σφ}x\cdot\log(\text{εφ}x)+\int \frac{1}{\text{ημ}^2x}\,dx\\ &= -\text{σφ}x\cdot\log(\text{εφ}x)-\text{σφ}x+c.\end{aligned}$$

8. (α) Έχουμε $a_n=\frac{1}{n}$ και $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{n}{n+1}\to 1$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ είναι ίση με 1. Αν ορίσουμε $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ στο $(-1,1)$, τότε $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$. Ολοκληρώνοντας και παρατηρώντας ότι $f(0)=0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)=\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$ στο $(-1,1)$. Αν $x=1$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει, ενώ αν $x=-1$ παίρνουμε την εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει.

(β) Θεωρήστε την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{x^n}{10^n}$.