Απειροστικός Λογισμός ΙΙ
31 Οκτωβρίου 2011

1. (1.5 μον.) Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ii) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

2. (1.5 μον.) (α) Έστω (a_k) και (b_k) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.
(β) Έστω (γ_k) ακολουθία θετικών αριθμών και έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{3k}$ συγκλίνει.

3. (2 μον.) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

4. (1.5 μον.) (α) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $a_n \to a$.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. (2 μον.) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}\, dx, \qquad \int (x+1)\sqrt{x^2+1}\, dx, \qquad \int x^2 \ln x \, dx.$$

6. (2 μον.) (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για κάθε $0 < a < 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,a]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
(β) Έστω $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$g(k) = \int_k^{k+1} g(x)\, dx - \int_k^{k+1} (k+1-x) g'(x)\, dx.$$

7. (2 μον.) (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $t_n \in [0,1]$ με την ιδιότητα

$$\int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{f(t_n)}{n+1}.$$

(β) Έστω $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b > 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} g(x)\, dx = +\infty.$$

Καλή Επιτυχία!