

Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 28/6/2011

1. (1.5 μον.) (α) Έστω $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων με $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in [a_n, b_n]$. Δείξτε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

2. (2 μον.) (α) Να δειχτεί ότι, για κάθε $x > 1$,

$$\int_2^x \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln x) - \ln(\ln 2).$$

(β) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές (για την πρώτη μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε το ερώτημα (α)):

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + k^2}{3^k + 1}.$$

3. (2 μον.) (α) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $\limsup_n a_n < 1$.

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει.

(β) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα $\frac{(-1)^n}{n^3} \leq x_n \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ συγκλίνουν.

4. (1 μον.) Εξετάστε αν είναι ομοιόμορφα συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις:

1. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{\pi x^3}$.

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \int_0^x (\arctan t)^2 dt$.

5. (2 μον.) (α) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ -1 + x^2, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Δείξτε ότι η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6. (2 μον.) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{5x^2 - 4}{x^3 - 4x} dx, \quad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}, \quad \int x^2 \ln x dx.$$

7. (1.5 μον.) (α) Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \geq 0$,

$$(f(x))^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt.$$

(β) Δίνονται $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Να βρεθεί το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{x} dx.$$

8. (1 μον.) Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση με $f(n) > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} f(t) dt := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty.$$

Καλή Επιτυχία!