Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 21/5/2011

1. (α) Έστω (α_n) και (β_n) φραγμένες ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\alpha_n \to \alpha$. Δείξτε ότι $\limsup_n(\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \limsup_n \beta_n$.

(β) Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι: αν ο $x \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσώρευσης (υπακολουθιακό όριο) της (α_n) τότε ο x είναι και σημείο συσσώρευσης της (β_n). **(2 μονάδες)**

2. (α) Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k(k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

(β) Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνουσα σειρά θετικών πραγματικών αριθμών. Ονομάζουμε *εκθέτη σύγκλισης* της σειράς τον

$$\beta = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\alpha} < +\infty\right\}.$$

Υπολογίστε τον εκθέτη σύγκλισης της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(γ) Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει. **(3 μονάδες)**

3. (α) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x, y \in A$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{1/2}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς (να αναφέρετε τα κριτήρια που χρησιμοποιείτε):

1. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, με $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
2. $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $g(x) = \sin(\sin x)$.
3. $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $h(x) = \sqrt{x}$.

(2.5 μονάδες)

4. (α) Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Δείξτε ότι η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $n \geq 2$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. **(2.5 μονάδες)**

5. (α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα συνάρτηση. Ορίζουμε $g : (a,b] \to \mathbb{R}$ και $h : [a,b) \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt.$$

Δείξτε ότι οι g και h είναι αύξουσες. Χρησιμοποιώντας το, δείξτε ότι: για κάθε $x \in (a,b)$,

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\,dt.$$

(β) Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}.$$

(2 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!