Απειροστικός Λογισμός ΙΙ – 21 Φεβρουαρίου 2011

1. (1.5 μον.) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και για κάποια υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) έχουμε $a_{k_n} \to a$, τότε $a_n \to a$.

(ii) Η συνάρτηση $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

2. (1.5 μον.) (α) Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$ συγκλίνει.

(β) Σωστό ή λάθος; Αν (b_k) είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{2k}$ συγκλίνει. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. (1.5 μον.) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k^2)}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

4. (1.5 μον.) (α) Σωστό ή λάθος; Αν $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη συνάρτηση και η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(β) Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$. Αν $f(1) = 1$, δείξτε ότι

$$\int_0^2 f(x)dx > 0.$$

5. (2 μον.) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx, \qquad \int \sin(\ln x) \, dx, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

6. (2 μον.) (α) (Θεωρία) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a, b)$, τότε η $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

(β) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f'(x)\, dx = 0 \;\text{ και }\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n x^{n-1} f(x)\, dx = f(1).$$

[*Υπόδειξη:* Για το δεύτερο όριο χρησιμοποιήστε, αν θέλετε, ολοκλήρωση κατά μέρη και το πρώτο όριο.]

7. (2 μον.) (α) (Θεωρία) Δείξτε ότι: αν η δυναμοσειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει στο $y \neq 0$ και αν $|x| < |y|$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.
(β) Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ (βαθμού n με κέντρο το 0) της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, 1)$, είναι το

$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}.$$

Ποιό είναι το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor $T_{n,g,0}$ της συνάρτησης $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x \in (-1, 1)$;

Καλή επιτυχία!