ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

9 Ιουλίου 2009

Θ.1 Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{2\nu-1}{\nu(\nu^2-4)}$. Δείξτε ότι αυτή συγκλίνει και ότι το όριό της είναι $\frac{89}{96}$.

(1,5 μονάδες)

Θ.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{για } x>0 \\ 0 & \text{για } x\leq 0\end{cases}$

Δείξτε: i) $\varphi^{(n)}(0)=0 \ \forall \ n=0,1,2,\ldots$

ii) δεν υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$ η φ να αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά (Taylor) με κέντρο 0.

(2 μονάδες)

Θ.3 Διατυπώστε το κριτήριο Riemann και αποδείξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με την Riemann ολοκληρωσιμότητα φραγμένης συνάρτησης.

(1 μονάδα)

Θ.4 $f:[a,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και Riemann ολοκληρώσιμη και θέτουμε $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ a\leq x\leq\beta$. Δείξτε ότι F είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,β). $(-\infty<a<\beta<+\infty)$.

(1 μονάδα)

Θ.5 Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\log n}$ και εξετάσετε για ποια $x\in\mathbb{R}$ αυτή συγκλίνει.

(1 μονάδα)

Θ.6 Υποθέτουμε ότι $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ ισχύει σ' ένα διάστημα $(-r,r)$, $r>0$. Υποθέτουμε ακόμη ότι υπάρχει ακολουθία $x_n\in(-r,r)$, $n=1,2,\ldots$ με $x_n\neq 0$ και $\lim_n x_n=0$ ώστε $f(x_n)=0$. Δείξτε ότι $a_0=f(0)=0$. Ακόμη δείξτε ότι $f(x)=x\,g(x)$ όπου $g(x)$ μια άλλη συγκλίνουσα δυναμοσειρά. Συμπεράνατε ότι $a_1=g(0)=0$ και γενικά $a_n=0 \ \forall \ n\in N$.

(2 μονάδες)

Θ.7 Δίνεται ακολουθία $a_n\in\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$. Υποθέτουμε ότι $a_{3n}\to 5$, $a_{3n+1}\to 6$ και $a_{3n+2}\to 7$. Αν a_{k_n} υπακολουθία της a_n που συγκλίνει στο $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\ell=5$ ή $\ell=6$ ή $\ell=7$. Βρείτε τα $\limsup a_n$ και $\liminf a_n$. Είναι η a_n φραγμένη;

(1,5 μονάδες)

Θ.8 Υπολογίστε τα $\int \ell n\, x\,dx$, $\lim_{x\to+\infty}\int_{15}^{x}\frac{dt}{t^3}$ και $I=\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$.

(1,5 μονάδες)

Θ.9 Εξετάστε αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ συγκλίνουν ή όχι;

(1 μονάδα)

Μπορείτε να γράψετε όσα θέματα θέλετε. Όποιος συγκεντρώσει συνολική βαθμολογία πάνω από 10, βαθμολογείται με 10

Καλή επιτυχία!