ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

19 Σεπτεμβρίου 2007

1. (2μ) Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι **αληθείς ή ψευδείς** (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο 0, τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (σε πραγματικό αριθμό).

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε είναι συνεχής.

2. (1μ) Αποδείξτε ότι, αν $a, b \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^4 + ax + b = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

3. (1.5μ) (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ είναι κοίλη.
(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ισχύει $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$.

4. (1.5μ) Εξετάστε (με αιτιολόγηση) αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right).$$

5. (1.5μ) Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_o \in [a,b]$ ώστε $f(x_o) = g(x_o)$.

6. (1.5μ) (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$.

7. (1.5μ) (α) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ τάξης n με κέντρο 0 για τη συνάρτηση f με $f(x) = e^x - x^3$ και αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n,f,0}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. (1.5μ) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Μπορείτε να γράψετε όσα θέματα θέλετε. Όποιος συγκεντρώσει συνολική βαθμολογία πάνω από 10, βαθμολογείται με 10. Σημειώστε τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό). Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!