1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακόλουθες σειρές:

$$(\alpha)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+(\log k)^2} \qquad (\beta)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\log k)^p},\ p>0$$

$$(\gamma)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^2} \qquad (\delta)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\log k)^k} \qquad (\varepsilon)^*\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\log k)^{\log k}}$$

$$(\sigma\tau)\ \sum_{k=1}^{\infty}k\sin\left(\frac{1}{k^3}\right) \qquad (\zeta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos(\frac{1}{k})\right) \qquad (\eta)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^a},\ a\in\mathbb{R}$$

Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε ότι:
Για κάθε $q, p > 0$, ισχύει: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^q}{x^p} = 0$,
το οποίο αποδεικνύεται με τον κανόνα De l'Hospital.

(α) Έστω $\alpha_k = \frac{1}{k+(\log k)^2}$. Τότε

$$a_k = \frac{1}{k\left(1+\frac{(\log k)^2}{k}\right)} = \frac{1}{k}\ \frac{1}{1+\frac{(\log k)^2}{k}}.$$

Αφού $\frac{1}{1+\frac{(\log k)^2}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, θα συγκρίνουμε την (a_k) με την $b_k = \frac{1}{k}$, οπότε θα έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1+\frac{(\log k)^2}{k}} = 1 \quad \left(\begin{matrix}\text{Προσοχή:}\\ 1\neq 0\end{matrix}\right).$$

Έτσι, από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς παίρνουμε ότι, αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

Άλλος τρόπος: Με το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

Έστω $p>0$.

1(β) Έστω $a_k = \frac{1}{(\log k)^p}$, $k\geq 2$. Η ακολουθία (a_k) είναι φθίνουσα – αφού η συνάρτηση $f(x) = (\log x)^p$ είναι αύξουσα (όταν $p>0$).
Επίσης $a_k > 0$ $\forall$ $k \geq 2$ και $a_k \to 0$.
Άρα εφαρμόζεται το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy, δηλαδή αρκεί να ελέγξουμε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.
Είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^p (\log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^p}.$$

Με το Κριτήριο της ρίζας, βλέπουμε ότι, αφού $\sqrt[k]{\frac{2^k}{k^p}} \to 2 > 1$, η τελευταία σειρά αποκλίνει. Άρα αποκλίνει και η αρχική, για κάθε τιμή του $p>0$.

Άλλος τρόπος. Συγκρίνουμε την (a_k) με την $b_k = \frac{1}{k}$. Αφού $\frac{(\log k)^p}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, είναι

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(\log k)^p}}{\frac{1}{k}} = +\infty,$$

άρα για μεγάλα k ισχύει $\frac{a_k}{1/k} \geq 1$, δηλαδή $a_k \geq \frac{1}{k}$ και αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, θα αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

1(γ) Έστω $a_k = \frac{\log k}{k^2}$, $k \geq 2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{\sqrt{k}} = 0$

και θα εφαρμόσουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης, συγκρίνοντας την (a_k) με την $b_k = \frac{1}{k^{3/2}}$.

Είναι

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{\log k}{k^2}}{\frac{1}{k^{3/2}}} = \frac{k^{3/2}\log k}{k^2} = \frac{\log k}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 .$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $0 < \frac{a_k}{b_k} < 1$,

άρα $0 < a_k < b_k$ για κάθε $k \geq k_0$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει (ως p-σειρά με $p>1$), συμπεραίνουμε ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Άλλος τρόπος: Με κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy, αφού δείξουμε ότι η (a_k) είναι φθίνουσα.

1(δ) Έστω $a_k = \frac{1}{(\log k)^k}$, $k \geq 2$

Είναι $a_k > 0$ $\forall k \geq 2$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο της ρίζας.

Είναι:

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\log k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 .$$ Αφού $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 0 < 1$,

από το κριτήριο της ρίζας παίρνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

1(ε) Έστω $a_k = \dfrac{1}{(\log k)^{\log k}}$, $k \geq 2$.

Αφού $a_k > 0$ για κάθε $k \geq 2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε κριτήριο σύγκρισης.
Παρατηρούμε ότι, αν $k > e^{e^2}$, τότε $\log k > e^2$, και, αφού η συνάρτηση $f(x) = x^{\log k}$ - με $k > e^{e^2}$ σταθερό είναι αύξουσα, παίρνουμε

$$(\log k)^{\log k} > e^{2\log k} = e^{\log k^2} = k^2.$$

Συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $k > e^{e^2}$ είναι

$$a_k = \frac{1}{(\log k)^{\log k}} < \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης παίρνουμε ότι και η $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

1(στ) Έστω $a_k = k \cdot \sin\left(\frac{1}{k^3}\right)$. Είναι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης. Συγκρίνουμε με την $b_k = \frac{1}{k^2}$. Είναι

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k \cdot \sin\left(\frac{1}{k^3}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{\sin\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^3}}.$$ Άρα

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$ Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

1(3) Έστω $a_k = 1 - \cos\frac{1}{k}$.

Είναι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και

$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x) = 0$.

Θα εφαρμόσουμε κριτήριο σύγκρισης.

Πρέπει να καταλάβουμε σαν ποια (πιο απλή) ακολουθία «συμπεριφέρεται» η (a_k) όταν $k\to\infty$.

Είναι:

$$a_k = 1-\cos\frac{1}{k} = \frac{(1-\cos\frac{1}{k})(1+\cos\frac{1}{k})}{1+\cos\frac{1}{k}} = \frac{1-\cos^2\frac{1}{k}}{1+\cos\frac{1}{k}} = \frac{1}{1+\cos\frac{1}{k}}\cdot \sin^2\frac{1}{k}.$$

Επειδή $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{1+\cos\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$, η (a_k) θα συμπεριφέρεται σαν την $\gamma_k = \sin^2\frac{1}{k}$. Αλλά η (γ_k) συμπεριφέρεται σαν την $b_k = \frac{1}{k^2}$.

Άρα θα συγκρίνουμε την (a_k) με την (b_k).

Είναι:

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\sin^2\frac{1}{k}}{1/k^2}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{1}{k}} = \left(\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos\frac{1}{k}} \longrightarrow \frac{1}{2},$$

αφού $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς παίρνουμε ότι, αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

1 (η)

Έστω $\alpha_k = \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^{a}}$.

Είναι

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1}$$

δηλαδή $$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{1/\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Άρα, θα εφαρμόσουμε οριακό κριτήριο σύγκρισης, συγκρίνοντας την $\alpha_k = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^{a}}$ με την $b_k = \dfrac{1}{k^{a+\frac{1}{2}}}$. Είναι

$$\frac{\alpha_k}{b_k} = \frac{\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k^{a}}}{\frac{1}{k^{a+\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}. \quad \left(\text{Προσοχή: } \frac{1}{2} > 0\right)$$

Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς παίρνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{a+\frac{1}{2}}}$ συγκλίνει, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $a+\frac{1}{2} > 1$ δηλαδή $a > \frac{1}{2}$.

2. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$.
(β) Αν $b_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}$.

(α) Ψευδές. Παράδειγμα: $a_k = (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$

Σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz, η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ συγκλίνει.

Όμως η $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ αποκλίνει.

Πράγματι, αν $t_n = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}$, τότε
$t_n = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \to -\infty$,
αφού για την αρμονική σειρά είναι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

(β) Αληθές.
Απόδειξη: Αν $b_k \geq 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ είναι αύξουσα και το ίδιο ισχύει για την ακολουθία (t_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}$. Όμως, μια αύξουσα ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι άνω φραγμένη.
Επιπλέον, ισχύει
$t_n = b_2 + b_4 + \dots + b_{2n} \leq b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{2n} = s_{2n}$
Έστω τώρα ότι $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ με $s \in \mathbb{R}$.
Τότε, $\forall n \in \mathbb{N}$: $t_n \leq s_{2n} \leq s$.
Αφού η ακολουθία (t_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το s, συγκλίνει. Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k}$ συγκλίνει.

3. Δίνονται ακολουθίες (a_k), (b_k) με $a_k \geq 0$ και $b_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(α) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2}$.

(β) Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$.

(γ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$.

(α) Βασίζεται στην ανισότητα:

$a_k^2 + b_k^2 \leq (a_k + b_k)^2$ που ισχύει όταν $a_k \geq 0$ και $b_k \geq 0$.

Άρα $\left(a_k^2 + b_k^2\right)^{1/2} \leq a_k + b_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ συγκλίνει.

Από την τελευταία ανισότητα και το κριτήριο σύγκρισης παίρνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$ συγκλίνει.

(β) Βασίζεται στην ανισότητα «αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου»:

(*) $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$, που ισχύει για κάθε $x, y \geq 0$.

Αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν, τότε συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$.

Αφού $\sqrt{a_k \cdot b_k} \leq \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, από το κριτήριο σύγκρισης παίρνουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot b_k}$ συγκλίνει.

(γ) Όμοια με το (β). Εδώ έχουμε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}$ συγκλίνουν, οπότε από το (β), η $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k \cdot a_{k+1}}$ συγκλίνει.

4. Δίνονται ακολουθίες (a_k), (b_k) με $a_k > 0$, $b_k > 0$ και με την ιδιότητα $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι συγκλίνει και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad , \quad \text{άρα} \quad \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \leq \frac{a_k}{b_k} .$$

Έτσι, επαγωγικά, παίρνουμε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} \leq \dots \leq \frac{a_1}{b_1} .$$

Θέτοντας $M = \frac{a_1}{b_1}$, έχουμε:

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{a_k}{b_k} \leq M$, δηλαδή $a_k \leq M \cdot b_k$. $\quad (*)$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αφού $a_k > 0$, $b_k > 0$, ισχύει η $(*)$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

5. Αν (s_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δείξτε ότι για την υπακολουθία (s_{2^n}) της (s_n) ισχύουν οι εκτιμήσεις: $\frac{n}{2} + 1 < s_{2^n} < n + 1$.

Για την δεξιά ανισότητα, γράφουμε

$$S_{2^n} = (1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right) + \frac{1}{2^n}$$

Για $k = 1, 2, \dots, n$
η k-στη παρένθεση είναι της μορφής:

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k - 1}}_{2^{k-1} \text{ όροι}} \leq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = 1$$

Άρα

$$S_{2^n} \leq n \cdot 1 + \frac{1}{2^n} < n + 1.$$

Για την αριστερή ανισότητα, γράφουμε

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Για $k = 2, 3, \dots, n$,
η k-στη παρένθεση είναι της μορφής

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1} \text{ όροι}} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$$

Άρα, για κάθε $n \geq 2$

$$S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

(Για $n = 1$, ισχύει ισότητα: $S_2 = 1 + \frac{1}{2}$)

Άλλος τρόπος: Με επαγωγή στο n.

6. (α) Δίνεται ακολουθία (a_k) με $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και (a_k) φθίνουσα. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α), βρείτε εκτιμήσεις (άνω και κάτω φράγματα) για το άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, $p > 1$. Δείξτε ειδικότερα ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

(α) Προκύπτει από την απόδειξη του κριτηρίου Συμπύκνωσης του Cauchy και είναι όμοιο με το επιχείρημα της Άσκησης 5.

Αν $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$, δείχνουμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\frac{1}{2} t_n < s_{2^n} \leq t_n \qquad (*)$$

Από την $(*)$, παίρνοντας $n \to +\infty$, προκύπτει ότι, αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η ακολουθία (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα και η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει και επιπλέον, ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

Απόδειξη της $(*)$.

Για τη δεξιά ανισότητα, γράφουμε

$$s_{2^n} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n - 1}) + a_{2^n}$$

και, χρησιμοποιώντας ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\underbrace{a_{2^{k-1}} + \dots + a_{2^k - 1}}_{2^{k-1} \text{ όροι}} \leq 2^{k-1} \cdot a_{2^{k-1}}, \quad \text{άρα}$$

$$s_{2^n} \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}} + 2^n \cdot a_{2^n}$$

Για την αριστερή ανισότητα, γράφουμε

$$S_{2^n} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \\ + \dots + \left(a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}\right)$$

και, χρησιμοποιώντας ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\left(\underbrace{a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}}_{2^{k-1} \text{ όροι}}\right) \geq 2^{k-1} \cdot a_{2^k} \quad , \text{ άρα}$$

$$S_{2^n} \geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 2^2 a_8 + \dots + 2^{n-1} \cdot a_{2^n}$$

άρα

$$S_{2^n} \geq \frac{1}{2}\left(2a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^n a_{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow S_{2^n} > \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}\right)$$

Δηλαδή $S_{2^n} > \frac{1}{2} t_n$.

(β) Από το (α) παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^k}$$

Η τελευταία είναι γεωμετρική σειρά, η οποία συγκλίνει αν και μόνο αν $2^{p-1} > 1 \Leftrightarrow p > 1$ και τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}.$$

Άρα, πάλι από το (α) έχουμε

$$\frac{2^{p-2}}{2^{p-1} - 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1}.$$

Για $p = 2$, έχουμε $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

7. Είδαμε ότι $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.
(α) Χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση του e και συγκρίνοντας την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ με κατάλληλη γεωμετρική σειρά, δείξτε ότι $e < 3$.
(β) Δείξτε ακόμα ότι, αν s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα αυτής της σειράς, ισχύει η ανισότητα: $0 < e - s_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}$.

(α) Είναι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots\right)$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα:
Για κάθε $n \geq 2$, $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots 2}_{n-1 \text{ παράγοντες}} \geq 2^{n-1}$.

Άρα, από τον τύπο για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς με λόγο $\frac{1}{2}$ και πρώτο όρο $\frac{1}{2^3}$,

$$e \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow e \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{11}{12} < 3$$

(β) Είναι

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

Άρα

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right]$$

$$\Rightarrow 0 < e - s_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots\right]$$

$$\Rightarrow 0 < e - s_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}}$$ (γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{n+2}$)

$$\Rightarrow 0 < e - s_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}$$

8. (*Αναδιατάξεις σειρών*) Είδαμε ότι η εναλλάσσουσα αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$ συγκλίνει. Έστω s το άθροισμά της.
(α) Δείξτε ότι $s > 0$.
(β) Θεωρούμε τώρα την εξής αναδιάταξη των όρων της παραπάνω σειράς:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

(όπου το μοτίβο είναι ότι ένας θετικός όρος ακολουθείται από δύο αρνητικούς.)
Αποδείξτε ότι το νέο άθροισμα ισούται με $\frac{s}{2}$.
Συμπέρασμα: Το άθροισμα μιας σειράς άπειρων όρων μπορεί να αλλάξει αν αναδιατάξουμε τους όρους της.

(α) Έστω $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$

Είναι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

Παρατηρούμε ότι η υπακολουθία (s_{2n}) είναι αύξουσα και, αφού $s_{2n} \nearrow s$, είναι $s > s_2$, δηλαδή $s > \frac{1}{2}$.
(Στην πραγματικότητα, ισχύει $s = \ln 2$).

(β) Είναι

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2} s$$

Σημ. Τα παραπάνω μπορούν να γίνουν πιο αυστηρά, αν χρησιμοποιήσει κανείς μερικά αθροίσματα.

9.** Δίνεται ακολουθία (a_k). Αν $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση, τότε η ακολουθία (b_k) με $b_k = a_{\sigma(k)}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, λέγεται αναδιάταξη της (a_k). Αποδείξτε ότι: Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε και για κάθε αναδιάταξη (b_k) της (a_k) η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει απολύτως και ισχύει

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Έστω $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Τότε, για κάθε $n \geq n_1$, ισχύει:

$$|S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Επιλέγουμε τώρα $n_2 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε όλοι οι όροι $a_1, a_2, \dots, a_{n_1}$ να περιλαμβάνονται μεταξύ των $b_1, b_2, \dots, b_{n_2}$, δηλαδή $\{1, 2, \dots, n_1\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_2)\}$.

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $m > n > n_2$, είναι

$$\sum_{k=n}^{m} |b_k| \leq \sum_{k=n_2+1}^{m} |b_k| \leq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{από την (1)}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει απολύτως.

Επιπλέον, για $n > n_2$, έχουμε:

$$(3) \quad \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_k \right| \leq \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{από την (1)}$$

αφού στο $\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n_1} a_k$ εμφανίζονται μόνο όροι a_ℓ της (a_n) με $\ell > n_1$. Άρα, αν $n > n_2$, τότε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k - S \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n} b_k - S_{n_1} \right| + |S_{n_1} - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

από τις (3) και (1). Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό αποδεικνύει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S$.