$\boxed{\Theta 1}$

$f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής, $f(1) = 1$. Νδο

$$\int_0^1 f(t)\,dt > 0.$$

Απόδ.

f συνεχής, $f(1) = 1 \Rightarrow$ για $\varepsilon = 1/2 > 0$ $\exists\, 1 > \delta > 0$:

$\forall x \in (1-\delta, 1]$: $f(x) > 1 - \varepsilon = 1/2$.

θεωρούμε την διαμέριση $P_0 = \{0, 1-\delta, 1\}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow L(f, P_0) = m_0[(1-\delta) - 0] + m_1[1 - (1-\delta)] \Rightarrow$

$m_0 \geq 0$, $m_1 \geq 1/2$

$\Rightarrow L(f, P_0) \geq 0 + 1/2 \cdot \delta > 0.$

f συνεχής $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη με

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \sup_P L(f,P) \geq L(f,P_0) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

$\boxed{\Theta 2}$

Δίνεται $f:[0,1]\to\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1/n : n\in\mathbb{N} \\ 0, & x=1/n : n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι R-ολοκλ.

Αποδ.

Γνωρίζουμε ότι αν μια f: έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας $\Rightarrow$ είναι R-ολοκλ.

Παρατηρούμε ότι $\forall\, b>0$, η f έχει στο $[b,1]$ πεπερ. πλήθος σημείων ασυνέχειας $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall\, b>0$: f είναι R-ολοκλ. στο $[b,1]$.

Από γνωστή άσκηση: f είναι R-ολοκλ. στο $[0,1]$.

$\boxed{\Theta 3}$

Έστω $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Νδο $\forall x \geq 0$:

$$(f(x))^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt.$$

Αποδ

Γνωρίζουμε ότι, αν $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι R-ολοκλ. $\Rightarrow$ Ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz για ολοκληρώματα:

$$\left(\int_a^b g(t) f(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)\left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)$$

Εφαρμόζουμε για τις $g=1$ και f' στο διάστημα $[0,x]$, $x \geq 0$:

$$\left(\int_0^x 1 f'(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^x 1^2 dt\right)\left(\int_0^x (f'(t))^2 dt\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0}\right)^2 \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt.$$

$\boxed{\Theta 4}$

Νδο η $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}+\int_0^{1/x}\frac{dt}{1+t^2}$$

είναι σταθερή, ίση με $\pi/2$.

Απόδ. Α

$$f(x)=\int_0^x (\arctan t)'\,dt+\int_0^{1/x}(\arctan t)'\,dt=$$

$$=\underbrace{\arctan x}_{=\omega}-\underbrace{\arctan 0}_{=0}+\underbrace{\arctan 1/x}_{=\phi}-\underbrace{\arctan 0}_{=0}\overset{(*)}{=}$$

$\omega \Leftrightarrow \tan\omega=x$ $\qquad$ $\phi \Leftrightarrow \tan\phi=1/x=\cot\omega \Rightarrow \omega+\phi=\pi/2$

$\omega+\phi=\pi/2$.

Απόδ. Β

$$g(t)=\frac{1}{1+t^2}\Rightarrow f(x)=G(x)+G(1/x)\qquad (G:\text{ αρ. ολοκλ. της } g).$$

$$\Rightarrow f'(x)=g(x)+g(1/x)\cdot(1/x)'=$$

$$=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f=\text{σταθερή}\Rightarrow f(x)=c=f(1),\ \forall x>0.$$

Άρα: $f(x)=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2(\arctan 1-\arctan 0)=$

$$=2\arctan 1=2\cdot\pi/4=\pi/2.$$

Θ5

$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής, περιοδική :

$\exists \int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$

Νδο. $f(x)=0, \ \forall x \in [0,+\infty)$.

Απόδ.

Έστω ότι $\exists \ x_0 \in [0,T] : f(x_0) > 0$.

Αν $x_0 = 0$ ή $x_0 = T$, το θέλω στο εσωτερικό, άρα την θεωρώ
↳και με περίοδο $2T \Rightarrow x_0 \in (0,2T)$.

Έστω λοιπόν ότι $\exists \ x_0 \in (0,2T) : f(x_0) = b > 0$, f συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \ \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (0,2T)$ και

$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) : f(x) > b/2$.

Θεωρώ την διαμέριση $P = \{0, x_0-\delta, x_0+\delta, 2T\}$ του $[0,2T]$.

Τότε:

$$L(f,P) \geq m_0((x_0-\delta)-0) + m_1((x_0+\delta)-(x_0-\delta)) + m_2(2T-(x_0+\delta))$$

$$\geq 0 + b/2 \cdot 2\delta + 0 = b\delta = c > 0.$$

$$\int_0^{2T} f(t)\,dt \geq L(f,P) \geq c > 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\cdot 2T} f(t)\,dt =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \int_0^{2T} f(t)\,dt \geq \lim_{n\to+\infty} n \cdot c = +\infty,$$

άτοπο.