ΤΕΣΤ 4

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN — ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ

Θ.1 Έστω $f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής, με $f(1)=1$. Νδο $\int_0^1 f(t)\,dt > 0$.

Θ.2 Δίνεται η συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \neq 1/n,\ n\in\mathbb{N} \\ 0, & x=1/n,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι R-ολοκληρώσιμη.

Θ.3 Έστω $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Νδο $\forall x \geq 0$:

$$(f(x))^2 \leq x\int_0^x (f'(t))^2\,dt$$

Θ.4 Νδο η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

είναι σταθερή και ίση με $\pi/2$.

Θ.5 Έστω $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής, περιοδική:

$$\exists \int_0^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$$

Νδο $f(x)=0$, $\forall x \in [0,+\infty)$.