ΜΑΘΗΜΑ 18

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Σύμβολο: $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Γράφουμε:

$$[F(x)]_a^b \equiv F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Θεώρημα 1 (ολοκλήρωση κατά μέρη).
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με f', g' ολοκληρώσιμες. Τότε $\forall x \in [a,b]$:

$$\int_a^x fg' = (fg)(x) - (fg)(a) - \int_a^x f'g.$$

Ιδιαιτέρως:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Απόδ. fg παραγ. και

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

ολοκληρώσιμη. Από το Β' Θεμελ. Θ. του ΑΛ για $fg \Rightarrow$

$$\int_a^x f'g + \int_a^x fg' = \int_a^x (fg)' = (fg)(x) - (fg)(a). \blacksquare$$

Πόρισμα ($2^{\text{ο}}$ ΘΜΤ του Ο.Λ.)
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$: f συνεχής & g μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Απόδ.

Υπολογίζουμε:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt =$$

$$\overset{(1)}{=} \int_a^b F'(t)g(t)\,dt \overset{(2)}{=} F(b)g(b) - \underbrace{F(a)}_{=0}g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt =$$

$$\overset{(3)}{=} F(b)g(b) - F(\xi)\int_a^b g'(t)\,dt =$$

$$\overset{(4)}{=} F(b)g(b) - F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) =$$

$$= F(b)g(b) - F(\xi)g(b) + F(\xi)g(a) =$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(t)\,dt + g(b)\big(F(b) - F(\xi)\big) =$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(t)\,dt + g(b)\int_{\xi}^{b} f(t)\,dt,$$ όπου:

(1) f συνεχής $\xrightarrow{\text{Α΄ ΘΘΑΛ}}$ $\exists F' = f$.

(2). Από θεώρ. ολοκλ. κατά μέρη: F, g παραγ. και $F' = f$, $\underset{\text{συνεχής}}{g'}$ ολοκλ.

(3) Α΄ ΘΜΤΟΛ: F συνεχής, g' ολοκλ. με $g' \geq 0$ (ή $g' \leq 0$).

(4). Β΄ ΘΘΑΛ για την g: $\exists\, g'$ ολοκλη (όχι συνεχής).

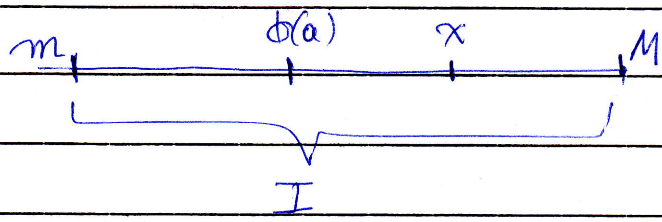
ΘΕΩΡ.2 (Α' Θεώρ. Αντικατάστασης)

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, ϕ' ολοκληρώσιμη.
$I := \phi([a,b])$, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Longrightarrow$

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds$$

Απόδειξη. ϕ παραγ. $\Rightarrow$ ϕ συνεχής $\Rightarrow$ $\phi([a,b]) = I$ κλειστό.
f συνεχής $\Rightarrow$ ολοκλ. στο $I = [m, M]$.

$$F(x) := \int_m^x f(s)\,ds \qquad (\phi(a) \text{ ίσως δεν είναι άκρο!})$$



f συνεχής στο $[m, M]$ $\Rightarrow$ (Α' ΘΘ του ΑΛ)
$\Rightarrow$ F παραγωγίσιμη & $F' = f$. Άρα

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{F'(\phi(t))\cdot\phi'(t)}_{(F\circ\phi)'(t)}\,dt \overset{*}{=}$$

[f συνεχής, ϕ παραγωγ. $\Rightarrow$ $f\circ\phi = F'\circ\phi$ συνεχής $\Rightarrow$ ολοκλ. ; ϕ' ολοκλ. $\Rightarrow$
$(F'\circ\phi)\cdot\phi' = (F\circ\phi)'$ ολοκληρώσιμη.]

(Β' ΘΘ του ΑΛ)

$$\overset{*}{=} \int_a^b (F\circ\phi)'(t)\,dt = (F\circ\phi)(b) - (F\circ\phi)(a) =$$

$$= \int_m^{\phi(b)} f(s)\,ds - \int_m^{\phi(a)} f(s)\,ds = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds \qquad \blacksquare$$

ΘΕΩΡ. 3 (Β' Θεώρ. Αντικατάστασης)

$\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη, $\psi'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$.

$I = \psi([a,b])$, $g : I \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b g(\psi(s))\,ds = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g(t)(\psi^{-1})'(t)\,dt$$

Απόδ. ψ' συνεχής, $\neq 0 \Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \psi \uparrow$ ή $\psi \downarrow$.

Έστω $\psi \uparrow \Rightarrow I = \psi([a,b]) = [\psi(a), \psi(b)]$ και (ΘΑΑ)

$\exists\, \psi^{-1} : [\psi(a), \psi(b)] \to [a,b]$ παραγωγίσιμη (συνεχώς)

$$\int_{\psi(a)=a'}^{\psi(b)=b'} g(t)(\psi^{-1})'(t)\,dt = \int_{a'}^{b'} \underbrace{g\circ\psi}_{f} \circ \underbrace{\psi^{-1}}_{\phi}(t)\underbrace{(\psi^{-1})'}_{\phi'}(t)\,dt =$$

$$\overset{\text{ΑΘΑ}}{=} \int_{\phi(a')}^{\phi(b')} f(s)\,ds = \int_a^b g(\psi(s))\,ds \quad \blacksquare$$

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, shift left, "\psi"] & I = [\psi(a), \psi(b)] \arrow[l, shift left, "\psi^{-1}"] \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$g(s) = g(\psi(\psi^{-1}(s))) = (g\circ\psi)(\psi^{-1}(s))$$