ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

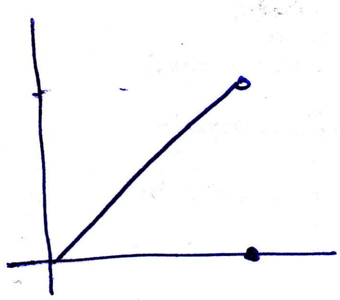
Άσκηση Σωστό ή λάθος;

(1) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ. $\Rightarrow$ παίρνει μέγιστη τιμή.

Λάθος: Πχ. $f: [0,1] \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

Η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή, ενώ είναι R-ολ.:
Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων

$$P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots, n/n = 1\}.$$



Τότε $\forall k = 0, \dots, n-1$ είναι

$m_k = \inf\{f(x): x \in [x_k, x_{k+1}]\} = x_k$

$M_k = \sup\{f(x): x \in [x_k, x_{k+1}]\} = x_{k+1}$

για $k = 0, 1, \dots, n-2$, ενώ

$m_{n-1} = 0$ και $M_{n-1} = 1$. Άρα

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) =$$

$$= [M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \dots + M_{n-1}(x_n - x_{n-1})] -$$

$$- [m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \dots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] =$$

$$= (M_0 - m_0)(x_1 - x_0) + (M_1 - m_1)(x_2 - x_1) + \dots +$$

$$+ (M_{n-1} - m_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow$$

OR2

$$\Rightarrow U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-2}(M_k-m_k)\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{1/n}+(M_{n-1}-m_{n-1})\underbrace{(x_n-x_{n-1})}_{1/n}=$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{1/n}+(1-0)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+1\right)=\frac{2n-1}{n^2}\longrightarrow 0,$$

δηλ. η f είναι R-ολ., από την ισοδύναμη διατύπωση του κρ. Riemann με ακολουθίες διαμερίσεων.

(3) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμ. $\Rightarrow$ R-ολ.

Λάθος: η συνάρτηση Dirichlet είναι φραγμένη, αλλά όχι R-ολ.

(4) f R-ολ. $\Leftrightarrow |f|$ R-ολ.

Λάθος: ($\Rightarrow$) ισχύει, γιατί $|f|=|\ |\circ f$

($\Leftarrow$) δεν ισχύει: π.χ. η $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ -1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $x\in[0,1]$.

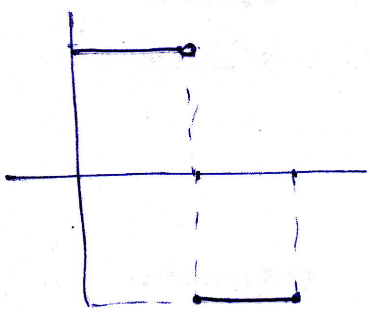
δεν είναι R-ολ. αλλά $|f|=1$ είναι.

Γιατί f δεν είναι R-ολ; $\forall P$:

$L(f,P)=-1(1-0)=-1$, $U(f,P)=1\cdot(1-0)=1$.

(5) f R-ολ. $\Rightarrow \exists\, c \in [a,b] : f(c)(b-a) = \int_a^b f$

λάθος: $f : [0,2] \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ -1, & x \in [1,2] \end{cases}$.



Παρατηρούμε ότι $f|_{[1,2]} = -1 =$ σταθ.

$\Rightarrow \exists \int_1^2 f = (-1)\cdot(2-1) = -1$.

Δείχνουμε ότι είναι R-ολ. στο $[0,1)$:

Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $P_n = \{k/n : k = 0,1,\dots,n\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U(f|_{[0,1]}, P_n) - L(f|_{[0,1]}, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{1/n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-2} (M_k - m_k) + (M_{n-1} - m_{n-1})\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{(1-1)}_{0} + (1-(-1))\right] = \frac{2}{n} \to 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f|_{[0,1]}$ είναι R-ολ.

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Άρα $\exists \int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = 1 + (-1) = 0$,

αλλά $\nexists\, c \in [0,2]$ με $f(c)\cdot(2-0) = 0$.

(7) f φραγμένη και $\exists P: U(f,P) = L(f,P) \Rightarrow f$ σταθ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ R-o.

Σωστό: $U(f,P) - L(f,P) = \sum \underbrace{(M_k - m_k)}_{\geq 0} \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{> 0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_k - m_k = 0 \quad \forall k \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ σταθ. στα $[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ —״— —— $[x_k, x_{k+1}] \cup [x_{k+1}, x_{k+2}]$.

$\Rightarrow f$ σταθ $\Rightarrow f$ R-o.

(8) f R-o και $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = 0$.

Σωστό: P τυχούσα: $\forall [x_k, x_{k+1}] \ \exists$ ρητός q_k.
$L(f,P) = \sum m_k (x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum M_k (x_{k+1} - x_k) = U(f,P)$.

$\Rightarrow \sup_P L(f,P) \leq 0 \leq \inf_P U(f,P)$

$\xrightarrow[\text{R-o}]{f} \sup L(f,P) = \inf(U(f,P)) = 0$.

Ασκ 9 (SOS)

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμ.: $\forall\, 0 < b \leq 1$ f R-ο στο $[b,1]$.
Νδο f R-ο στο $[0,1]$.

Απόδ f φραγμ. $\Rightarrow \exists\, A > 0$: $|f(x)| \leq A$ $\forall x \in [0,1]$.
Εστω $\varepsilon > 0$. παίρνουμε $0 < b \lneq 1$: $2Ab < \varepsilon/2 \Rightarrow$
$\Rightarrow b \leq \min\{1, \varepsilon/4A\}$.
f R-ο στο $[b,1] \Rightarrow \exists$ διαμ. Q του $[b,1]$:
$$U(f|_{[b,1]}, Q) - L(f|_{[b,1]}, Q) < \varepsilon/2.$$

$P := \{0\} \cup Q$.

$$U(f,P) - L(f,P) = (M_0 - m_0)(b-0) + U(f,Q) - L(f,Q)$$

$$(M_0 \leq A, \quad m_0 \geq -A \Rightarrow -m_0 \leq A) \Rightarrow$$

$$(M_0 - m_0) \leq 2A \Rightarrow (M_0 - m_0) \cdot b \leq 2Ab < \varepsilon/2.$$

($\to$ Πόρισμα: Ασκ. 2)

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ασκ 10 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ R-ο.

Απόδ. f ολοκλ. στο $[0,1]$ απο ασκ. 9.
(διότι f φρ. και $\sin 1/x$ ολοκλ. στο $[b,1]$, $b > 0$
σαν συνεχής)

ομοίως f ολοκλ. στο $[-1,0]$.

Αρα f ολοκλ. στο $[-1,1]$.

Ασκ 11 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμ. και συνεχής παντού εκτός από ένα $x_0\in(a,b)$. Ν.δ.ο g ολοκλ.

Αποδ Όπως στα $[a,x_0]$ και $[x_0,b]$ (Σχολιάστε!).

Ασκ 14 SOS $f:[a,b]$ συνεχής, $f(x)\geq 0$ Τότε

$$\int_a^b f(x)dx=0 \iff f(x)=0.$$

Αποδ.

($\Leftarrow$) Γνωστό, για την σταθερή $f=0$.

($\Rightarrow$) Έστω $\int_a^b f=0$ και $f\neq 0$. Τότε $\exists\ x_0\in[a,b]: f(x_0)>0$.

Λόγω συνέχειας $\exists\ \theta>0: f(x)>0\quad \forall x\in(x_0-\theta, x_0+\theta)\cap[a,b]$

Μπορούμε να θεωρούμε $x_0\in(a,b)$.

$\varepsilon:=f(x_0)/2>0 \Rightarrow \exists\ \delta>0:$

$$a<x_0-\delta<x_0<x_0+\delta<b \quad \text{και}$$

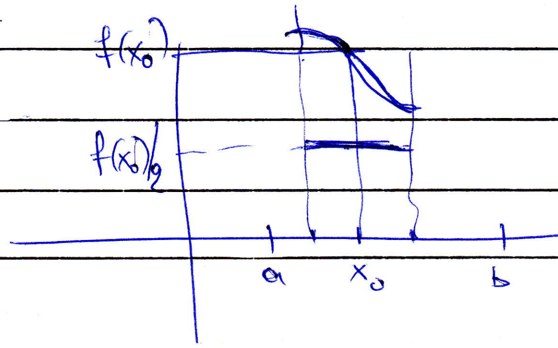
$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$:

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}\Rightarrow f(x)>f(x_0)/2\Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0-\delta} f+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f+\int_{x_0+\delta}^{b} f\geq$$

$$\geq 0+2\delta\cdot\frac{f(x_0)}{2}+0=\delta f(x_0)>0,$$

άτοπο.



ΘR.7

Ασκ 16

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής : $\forall$ συνεχή $g:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

Ν.δ.ο $f(x)=0 \quad \forall x\in[a,b]$.

Απόδ. $g:=f. \Rightarrow \int_a^b f(x)^2\,dx = 0$

$f(x)^2 \geq 0$ και συνεχής

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b f(x)^2\,dx=0\\ f(x)^2\geq 0 \text{ και συνεχής}\end{array}\right\} \overset{\text{Ασκ}}{\underset{14}{\Rightarrow}} f(x)^2=0 \Downarrow f(x)=0.$$

Ασκ 17

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής: $\forall$ συνεχή $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $g(a)=g(b)=0$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$$

Ν.δ.ο $f(x)=0, \quad \forall x\in[a,b]$.

Απόδ Με άτοπο: Αν $\exists\, x_0\in(a,b)$: $f(x_0)>0$. (αν $f(x_0)<0$, όμοια)

$\exists\, \delta>0$: $a<x_0-\delta<x_0<x_0+\delta<b$ και

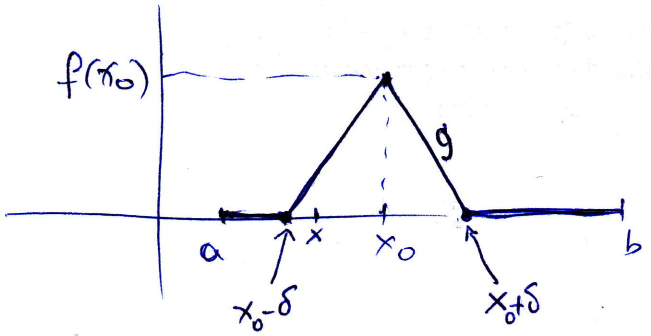
$f(x) > f(x_0)/2 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

ορίζουμε: $g(x)=0$ στα $[a, x_0-\delta]$, $[x_0+\delta, b]$

$g(x_0)=f(x_0)$

$g(x)=\frac{f(x_0)}{\delta}\cdot(x-(x_0-\delta)), \; x\in[x_0-\delta, x_0]$

$g(x)=-\frac{f(x_0)}{\delta}\cdot(x-x_0)+f(x_0), \; x\in[x_0, x_0+\delta]$



Τότε:

$$0=\int_a^b fg=\int_a^{x_0-\delta}\underbrace{fg}_{=0}+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\underbrace{fg}_{\geq 0}+\int_{x_0+\delta}^{b}\underbrace{fg}_{=0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\underbrace{fg}_{\geq 0}=0\Rightarrow fg=0\Rightarrow f(x_0)g(x_0)=f(x_0)^2=0,$$

άτοπο.

<u>Ασκ. 18</u>

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολ. $\Rightarrow$ ισχύει η ανισότητα C-S:

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2\right)\cdot\left(\int_a^b g^2\right).$$

<u>Απόδ</u>

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:$$

$\forall t\in\mathbb{R}:\quad P(t)=\int_a^b (tf(x)+g(x))^2\,dx=\int_a^b(tf+g)^2.$

Αφού f,g R-ολ. $\Rightarrow$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $tf+g$ R-ολ. $\Rightarrow$

$(tf+g)^2$ R-ολ., δηλ. $\exists\, P(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$0\leq P(t)=\int_a^b (tf(x)+g(x))^2\,dx=$$

$$=\int_a^b\left[t^2f(x)^2+2tf(x)g(x)+g(x)^2\right]dx=$$

$$= t^2 \int_a^b f(x)^2 dx + 2t \int_a^b f(x) g(x)\, dx + \int_a^b g(x)^2 dx =$$

$= $ τριώνυμο ως προς t, με $A = \int_a^b f^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow$

$$4\left(\int_a^b f(x) g(x)\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx\right)\left(\int_a^b g^2(x) dx\right).$$

Ασκ 19

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-ολοκλ. Νδο

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2 dx$$

Ισχύει αν πάρουμε τυχαίο $[a,b]$?

Απόδ. $g(x) = 1$ και εφαρμόζω C-S.

Για $[a,b]$: όχι: αντιπαράδειγμα: $f(x) = 1$ στο $[0,2]$:

$$\left(\int_0^2 f(x) dx\right)^2 = 2^2 = 4$$

$$\int_0^2 f(x)^2 dx = \int_0^2 1 dx = 2 \neq 4.$$