ΜΑΘΗΜΑ 16

Ο ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ RIEMANN

Παρακάτω βλέπουμε ένα δεύτερο ορισμό του ολοκληρώματος:

ΟΡΣ (Riemann)

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f λέγεται <u>ολοκληρώσιμη</u> $\iff \exists\, I(f)\in\mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0$: $\forall$ διαμέριση P με $\|P\|<\delta$ και $\forall$ επιλογή σημείων $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,\dots,n-1$:

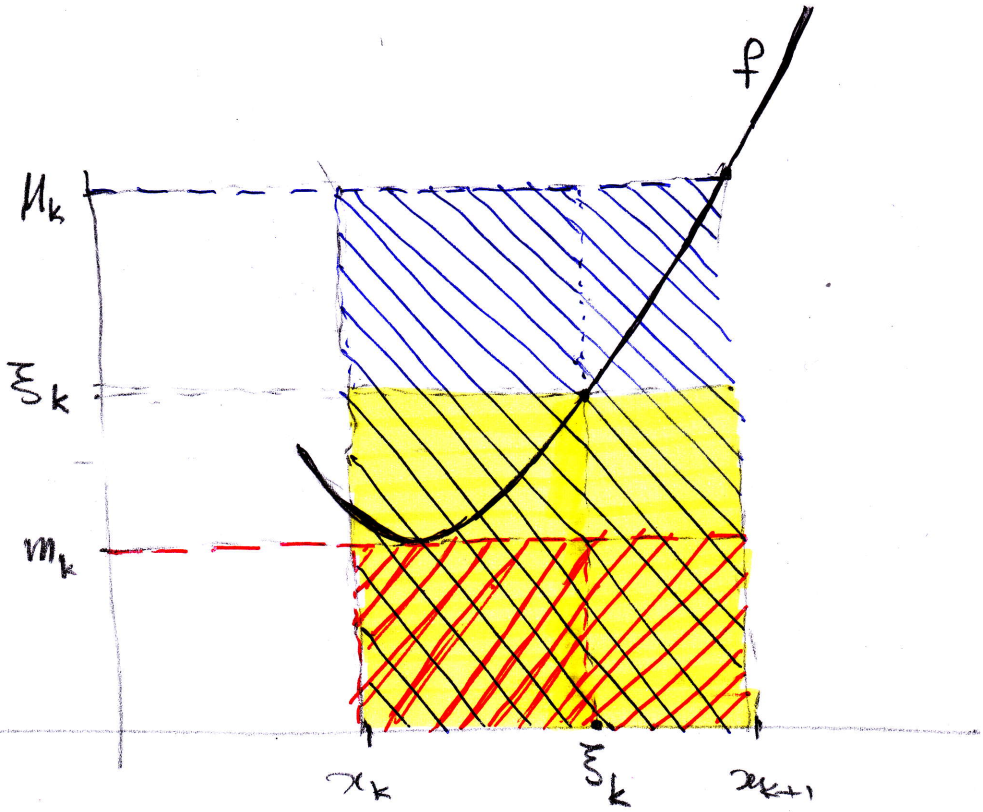
$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)-I(f)\right|<\varepsilon$$

Συμβ: $\Sigma(f,P,\Xi):=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$

ΘΕΩΡ. Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά τον ορισμό του Riemann $\iff f$ είναι R-ολοκλ. (κατά Darboux).

Δηλ. οι ορισμοί των Darboux και Riemann είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.

Αποδ.



Παρατηρούμε ότι $\forall P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

και $\forall \Xi = \{\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_{k+1}, x_k]$:

$$L(f,P) \leq \Sigma(f,P,\Xi) \leq U(f,P)$$

($\Rightarrow$) Εστω ότι η f είναι ολοκλ. κατά τον ορσ. του Riemann. Εστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, \delta > 0$: $\forall$ P με $\|P\| < \delta$

και $\forall \Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$:

$$|\Sigma(f,P,\Xi) - I(f)| < \varepsilon/4 .$$

$$\Downarrow$$

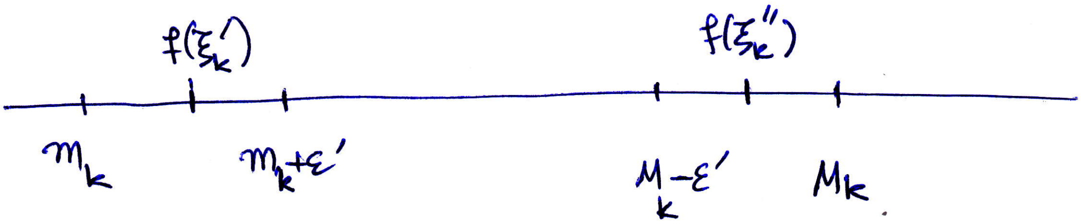
$$I(f) - \varepsilon/4 < \Sigma(f,P,\Xi) < I(f) + \varepsilon/4 \quad (1)$$

Παίρνουμε μια διαμέριση P με $\|P\| < \delta$.

Από τον ορσ. sup-inf έχουμε ότι για $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$:

$\exists\, \xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$: $m_k \leq f(\xi_k') < m_k + \varepsilon'$ και

$$M_k - \varepsilon' < f(\xi_k'') \leq M_k .$$



$$\left.\begin{array}{l} m_k \leq f(\xi_k') < m_k+\varepsilon' \quad \text{και} \\ M_k-\varepsilon' < f(\xi_k'') \leq M_k . \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{για} \\ \Xi'=\{\xi_0', \dots, \xi_{n-1}'\} \\ \Xi''=\{\xi_0'', \dots, \xi_{n-1}''\} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_k(x_{k+1}-x_k) \leq f(\xi_k')(x_{k+1}-x_k) < (m_k+\varepsilon')(x_{k+1}-x_k) \\ \text{και} \\ (M_k-\varepsilon')(x_{k+1}-x_k) < f(\xi_k'')(x_{k+1}-x_k) \leq M_k(x_{k+1}-x_k) \quad \forall k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L(f,P) \leq \underline{\Sigma(f,P,\Xi') < L(f,P) + \varepsilon'(b-a) = L(f,P)+\varepsilon/4} \\ \underline{U(f,P)-\varepsilon/4 < \Sigma(f,P,\Xi'')} \leq U(f,P) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Sigma(f,P,\Xi')-\varepsilon/4 < L(f,P) \leq U(f,P) < \Sigma(f,P,\Xi'')+\varepsilon/4$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} I(f)-\varepsilon/2 < \Sigma(f,P,\Xi')-\varepsilon/4 < L(f,P) \leq$$

$$\leq U(f,P) < \Sigma(f,P,\Xi'')+\varepsilon/4 < I(f)+\varepsilon/2 .$$

$$\Rightarrow 0 \leq U(f,P)-L(f,P) < (I(f)+\varepsilon/2)-(I(f)-\varepsilon/2) = \varepsilon ,$$

άρα ισχύει το κριτήριο Riemann (για τον ορσ. του Darboux).

Παρατηρούμε ότι:

$$I(f)-\varepsilon/2 < L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq U(f,P) < I(f)+\varepsilon/2 \quad \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = I(f).$$

($\Leftarrow$) χωρίς απόδειξη. ■