ΜΑΘΗΜΑ 15

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ R-ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡ. 1

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολ. και $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε:

(i) $f+g$ είναι R-ολ. και $\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$.

(ii) λf είναι R-ολ. και $\int_a^b \lambda f=\lambda\int_a^b f$.

Αποδ. Έστω $P=\{x_0=a<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$.

(i) Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ συμβολίζουμε με m_k, m_k^f και m_k^g τα $\inf\{(f+g)(x): x\in[x_k,x_{k+1}]\}$, $\inf\{f(x): x\in[x_k,x_{k+1}]\}$ και $\inf\{g(x): x\in[x_k,x_{k+1}]\}$, αντίστοιχα, και ανάλογα για τα M_k, M_k^f, M_k^g.

Από την ανισότητα $f(x)+g(x)\geq m_k^f+m_k^g$, $\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$ προκύπτει $m_k\geq m_k^f+m_k^g$. Ανάλογα, $M_k\leq M_k^f+M_k^g$. Άρα, για κάθε διαμέριση P,

$$L(f,P)+L(g,P)\leq L(f+g,P)\leq U(f+g,P)\leq U(f,P)+U(g,P). \quad (1)$$

Έστω τώρα $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, P_f, P_g$:

$$0\leq U(f,P_f)-L(f,P_f),\ U(g,P_g)-L(g,P_g)<\varepsilon/2.$$

Θεωρούμε την εκλέπτυνση $P=P_f\cup P_g$. Γνωρίζουμε ότι

$$L(f,P_f)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq U(f,P_f), \quad (2)$$

$$L(g,P_g)\leq L(g,P)\leq U(g,P)\leq U(g,P_g). \quad (3)$$

Οπότε:

$$(2)\Rightarrow 0\leq U(f,P)-L(f,P)\leq U(f,P_f)-L(f,P_f)<\varepsilon/2. \quad (4)$$

$$(3)\Rightarrow 0\leq U(g,P)-L(g,P)\leq U(g,P_g)-L(g,P_g)<\varepsilon/2. \quad (5)$$

$$(1,4,5)\Rightarrow 0\leq U(f+g,P)-L(f+g,P)\leq$$

$$\leq U(f,P)+U(g,P)-L(f,P)-L(g,P)<2\cdot\varepsilon/2=\varepsilon,$$

και ισχύει το κρ. Riemann.

Για την ισότητα (i) παρατηρούμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) \\ L(g,P) \leq \int_a^b g \leq U(g,P) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(f,P)+L(g,P) \leq \int_a^b f+\int_a^b g \leq U(f,P)+U(g,P).$$

Επίσης: $L(f+g,P) \leq \int_a^b (f+g) \leq U(f+g,P)$.

Συνδυάζοντας με την (1) έχουμε:

$$L(f,P)+L(g,P) \leq \int_a^b f+\int_a^b g, \quad \int_a^b (f+g) \leq U(f,P)+U(g,P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b (f+g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right) \right| \leq U(f,P)+U(g,P)-L(f,P)-L(g,P) < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(ii) Αν $\lambda=0 \Rightarrow \lambda f=0$ είναι R-ολ. με $\int_a^b \lambda f = 0 = \lambda \int_a^b f$.

Αν $\lambda>0$: $\forall k=0,\dots,n-1$ είναι $m_k^{\lambda f} = \lambda m_k^f$ και $M_k^{\lambda f} = \lambda M_k^f$, άρα $L(\lambda f,P)=\lambda L(f,P)$, $U(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)$, και

$$\underline{\int_a^b} \lambda f = \sup_P \{L(\lambda f,P)\} = \sup_P \{\lambda L(f,P)\} = \lambda \sup_P \{L(f,P)\} =$$

$$= \lambda \underline{\int_a^b} f = \lambda \overline{\int_a^b} f = \lambda \inf_P \{U(f,P)\} = \inf_P \{\lambda U(f,P)\} =$$

$$= \inf \{U(\lambda f,P)\} = \overline{\int_a^b} \lambda f$$

άρα η λf είναι R-ολ. με $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Αν $\lambda<0$, ανάλογα.

<u>Πόρισμα</u> (γραμμικότητα του ολοκληρώματος).

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολ., $\lambda,\mu\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda f+\mu g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολ.

και

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

ΘΕΩΡ. 2

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμ. και $c\in(a,b)$. Τότε:
f R-ολ. στο $[a,b] \iff f$ R-ολ. στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$ και

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Απόδ.

($\Rightarrow$) Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή f R-ολ. $\Rightarrow \exists\, P_\varepsilon$ διαμέριση του $[a,b]$ με $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$. Θέτουμε $P=P_\varepsilon\cup\{c\}$.
Επειδή η P είναι εκλέπτυνση της P_ε:

$$L(f,P_\varepsilon)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq U(f,P_\varepsilon),$$

άρα $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$. Θέτουμε $P_1=P\cap[a,c]$ και $P_2=P\cap[c,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=\left[m_0(x_1-x_0)+\dots+m_k(c-x_k)\right]+\left[m_{k+1}(x_{k+1}-c)+\dots + m_{n-1}(x_n-x_{n-1})\right]=$$

$$=L(f|_{[a,c]},P_1)+L(f|_{[c,b]},P_2)$$

Ανάλογα, $U(f,P)=U(f|_{[a,c]},P_1)+U(f|_{[c,b]},P_2)$. Άρα:

$$0\leq U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\leq U(f|_{[a,c]},P_1)+U(f|_{[c,b]},P_2)-L(f|_{[a,c]},P_1)-L(f|_{[c,b]},P_2)<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\leq \underbrace{\left[U(f|_{[a,c]},P_1)-L(f|_{[a,c]},P_1)\right]}_{0\leq}+\underbrace{\left[U(f|_{[c,b]},P_2)-L(f|_{[c,b]},P_2)\right]}_{0\leq}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow U(f|_{[a,c]},P_1)-L(f|_{[a,c]},P_1)<\varepsilon \text{ και } U(f|_{[c,b]},P_2)-L(f|_{[c,b]},P_2)<\varepsilon.$$

$\Rightarrow f|_{[a,c]}$ και $f|_{[c,b]}$ είναι R-ολ.

Για την ισότητα, παρατηρούμε ότι

$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P)$$

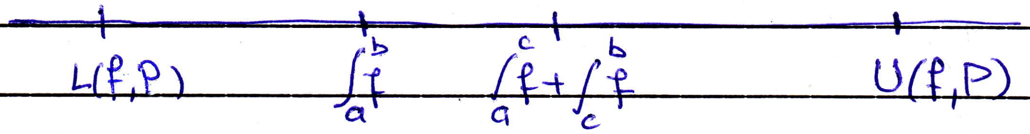
και

$$\left.\begin{aligned} L(f|_{[a,c]},P_1) \leq \int_a^c f \leq U(f|_{[a,c]},P_1) \\ L(f|_{[c,b]},P_2) \leq \int_c^b f \leq U(f|_{[c,b]},P_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(f|_{[a,c]},P_1) + L(f|_{[c,b]},P_2) = L(f,P) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq$$

$$\leq U(f,P) = U(f|_{[a,c]},P_1) + U(f|_{[c,b]},P_2)$$

Άρα:



$$\left|\int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right)\right| < U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή οι $f|_{[a,c]}$ και $f|_{[c,b]}$ είναι R-ολ. $\exists$ P_1 διαμέριση του $[a,c]$ και P_2 διαμέριση του $[c,b]$:

$0 \leq U(f|_{[a,c]},P_1) - L(f|_{[a,c]},P_1) < \varepsilon/2$ και

$0 \leq U(f|_{[c,b]},P_2) - L(f|_{[c,b]},P_2) < \varepsilon/2$

Τότε η $P = P_1 \cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με

$$\left.\begin{aligned} L(f,P) = L(f|_{[a,c]},P_1) + L(f|_{[c,b]},P_2) \\ U(f,P) = U(f|_{[a,c]},P_1) + U(f|_{[c,b]},P_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq U(f,P) - L(f,P) \leq U(f|_{[a,c]},P_1) - L(f|_{[a,c]},P_1) +$$

$$+ U(f|_{[c,b]},P_2) - L(f|_{[c,b]},P_2) <$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άρα η $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι R-ολ. Για την ισότητα, εργαζόμαστε όπως στο ($\Rightarrow$). ∎

ΘΕΩΡ. 3

Εστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ. με $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Τότε

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

<u>Αποδ.</u> Θεωρούμε την τετριμμένη διαμέριση $P_0 = \{a<b\}$. Τότε:

$$m(b-a) \leq L(f,P_0) \leq \int_a^b f \leq U(f,P_0) \leq M(b-a). \quad \blacksquare$$

<u>ΟΡΙΣ.</u> Εστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ. Η <u>μέση τιμή</u> της f στο $[a,b]$ είναι το

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \in \mathbb{R}.$$

<u>Παρατήρηση.</u> Από το Θεώρ. 3 προκύπτει ότι

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M.$$

<u>Πόρισμα.</u>

(α) $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ., $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f \geq 0$$

(β) $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ., $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

ΘΕΩΡ. 4

Έστω $f: [a,b] \to [m,M]$ R-ολ. και $g: [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ $g \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ. ■

Πόρισμα.

$f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-ολ. Τότε:

(i) f^2 R-ολ.

(ii) $g \cdot f$ R-ολ.

Απόδ.

(i) $f^2 = \tau \circ f$, όπου f R-ολ. και $\tau(x) = x^2$ συνεχής.

(ii) $f \cdot g = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$. ■

ΣΥΜΒΑΣΗ:

$a = b \Rightarrow \int_a^b f := 0$.

$a < b \Rightarrow \int_b^a f := -\int_a^b f$