ΜΑΘΗΜΑ 14

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ R-ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Παράδ. 1

$a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ και $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ σταθερή:
$f(x)=c\in\mathbb{R}$, $\forall x\in[a,b]$.
Τότε η f είναι R-ο.

Παρατηρούμε ότι $\forall$ διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$, είναι:

$$m_k=M_k=c\ ,\quad \forall\ k=0,\dots,n-1.$$

Άρα:

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)=c\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=c(x_n-x_0)=c\cdot(b-a).$$

Ομοίως

$$U(f,P)=c\cdot(b-a),$$

οπότε

$$\sup_P L(f,P)=\inf_P U(f,P)=c(b-a)=\int_a^b c\,dx.$$

Παραδ. 2

$f:[a,b]\to\mathbb{R}: f(x)=x$ είναι R-ο.

Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων
$\left(P_n=\{x_k=a+k\frac{b-a}{n} : k=0,\dots,n\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Τότε $\forall\ n\in\mathbb{N}$ είναι: $m_k=x_k$ και $M_k=x_{k+1}$, άρα:

$$L(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

$$U(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n} \longrightarrow 0.$$

Απο την ισοδύναμη διατύπωση του Κρ. R. με ακολουθίες διαμερίσεων, η $f(x) = x$ είναι R-ο στο $[a,b]$.

Παράδ. 3

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ είναι R-ο.

Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων
$(P_n = \{x_k = k/n : k = 0, \ldots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$.
Δηλ. $\forall n \in \mathbb{N}$: $P_n = \{0 = x_0 < x_1 = 1/n < x_2 = 2/n < \ldots < x_n = n/n = 1\}$.
Τότε: σε κάθε διάστημα $[k/n, (k+1)/n]$ είναι

$$m_k = k^2/n^2 , \quad M_k = (k+1)^2/n^2.$$

Άρα

$$L(f,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = (*)$$

Ισχυρ: $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (απόδ: επαγωγικά)

$$\circledast\quad \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{(2n-1)(n-1)}{6n^2}=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

Αντίστοιχα:

$$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)^2}{n^2}=$$

$$=\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

Άρα:

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}-\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}=$$

$$=\frac{6n}{6n^2}=\frac{1}{n}\longrightarrow 0$$

Παρατηρούμε ότι $\uparrow L(f,P_n)\to 1/3$ $\quad\downarrow U(f,P_n)\to 1/3$

$$L(f,P_n)\le I\le U(f,P_n)$$

$$\downarrow 1/3 \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \downarrow 1/3$$

$$1/3\le I\le 1/3 \Rightarrow I=1/3$$

Παραδ. 4

$f:[0,1]\to\mathbb{R}:\ f(x)=\sqrt{x}$.

Θεωρούμε την ίδια (P_n) κι επειδή $f\uparrow$, έχουμε:

$$L(f,P_n)=f(0)\cdot 1/n+f(1/n)\cdot 1/n+\dots+f\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\cdot 1/n=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sqrt{1/n}+\sqrt{2/n}+\dots+\sqrt{\tfrac{n-1}{n}}\right)=\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n-1}\right)$$

$U(f,P_n) = f(1/n)\cdot 1/n + \dots + f(n/n)\cdot 1/n =$

$= 1/n\left(\sqrt{1/n} + \sqrt{2/n} + \dots + \sqrt{n/n}\right) =$

$= \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}\right)$

$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sqrt{n} = \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$ R-o.

Παραδ. 5

Η συνάρτηση του Dirichlet: $g: [0,1] \to \mathbb{R}$:

$g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ φραγμ.

$P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$, τυχαία.

$\forall\ [x_k, x_{k+1}]$ $\exists$ y_k ρητός, z_k άρρητος $\in [x_k, x_{k+1}]$

$\Rightarrow M_k = 1,\ m_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} L(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} 0\cdot(x_{k+1} - x_k) = 0 \Longrightarrow \sup_P L(g,P) = 0 \\ \text{και} \hspace{9em} \neq \\ U(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot(x_{k+1} - x_k) = 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow \inf_P U(g,P) = 1. \end{cases}$

όχι R.o.

Παραδ. 6

$h: [0,1] \to \mathbb{R}$: $h(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Για τυχαία P : $m_k = 0$, $M_k = x_{k+1} \Rightarrow L(h,P) = 0$ και

$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(x_{k+1} - x_k) > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} + x_k}{2}\cdot(x_{k+1} - x_k) =$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) = \frac{1}{2}(1-0) = 1/2 \Rightarrow$ όχι R-o.

ΘΕΩΡ.1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μονότονη $\Rightarrow$ f R.o.

Αποδ. Έστω $f\uparrow$ $\Rightarrow$ $f(a)\le f(x)\le f(b)$ $\Rightarrow$ f φραγμ.

Χωρίζω σε ίσα υποδιαστήματα:

$$P_n=\{a<\underset{\overset{\|}{x_1}}{a+\frac{b-a}{n}}<\underset{\overset{\|}{x_2}}{a+2\frac{b-a}{n}}<\cdots<a+\frac{n(b-a)}{n}=b\}$$

$$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}.$$

$$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum f(x_{k+1})\cdot\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right).$$

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right).$$

$$\Downarrow$$

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}\left(f(x_n)-f(x_0)\right)=\underset{\downarrow\atop 0}{\frac{b-a}{n}}\cdot\left(f(b)-f(a)\right)$$

ΘΕΩΡ.2 Κάθε συνεχής $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι R.o.

Απόδ: Έστω $\varepsilon > 0$. f ο.σ. $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon / _{b-a}.$$

Επίσης $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $\frac{b-a}{n} < \delta$. Θεωρώ την

$$P_n := \{\underset{\overset{\parallel}{x_0}}{a} < \underset{\overset{\parallel}{x_1}}{a + \frac{b-a}{n}} < a + 2\frac{b-a}{n} < \cdots < \underset{\overset{\parallel}{x_n}}{a + n\frac{b-a}{n}} = b\}.$$

f συνεχής στο $[x_k, x_{k+1}] \rightsquigarrow$ παίρνει max & min

δηλ. $\exists\, \underbrace{y_k', y_k''}$ $\in$: $f(y_k'') \leq f(x) \leq f(y_k')$ $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\Rightarrow |y_k' - y_k''| < \frac{b-a}{n} < \delta \Rightarrow$$

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') < \varepsilon / _{b-a}.$$

$$\Downarrow$$

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum \left(f(y_k') - f(y_k'')\right)(x_{k+1} - x_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon \qquad \blacksquare$$