ΤΕΣΤ 3

Ενδεικτικές Απαντήσεις

$\boxed{\Theta.1}$ Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta:=\varepsilon^2$. Τότε $\forall\, x,y\in A$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \le |x-y|^{1/2} < \delta^{1/2} = \varepsilon$. Άρα f ο.σ.

$\boxed{\Theta.2}$ Αφού $f(x)>1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε $0<\frac{1}{f(x)}<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή f ο.σ, $\exists\, \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall\, x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Για αυτό το δ έχουμε:

$$|x-y|<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{f(x)\cdot f(y)} < \varepsilon\cdot 1\cdot 1 = \varepsilon,$$

άρα $1/f$ ο.σ.

$\boxed{\Theta.3}$ f φραγμ. $\Rightarrow \exists\, M>0 : |f(x)|<M$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Έστω $\varepsilon>0$. f ο.σ. $\Rightarrow \exists\, \delta=\delta(\varepsilon/2M)>0 : \forall\, x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2M$. Για το ίδιο δ:

$$\begin{aligned}|x-y|<\delta \Rightarrow |f^2(x)-f^2(y)| &= |(f(x)+f(y))\cdot(f(x)-f(y))| \le \\ &\le \big(|f(x)|+|f(y)|\big)\cdot|f(x)-f(y)| < \\ &< 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,\end{aligned}$$

άρα f^2 ο.σ.

$\boxed{\Theta.4}$ Δεν ισχύει: Έστω $f(x)=g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε f,g Lipschitz με $M=1$, αλλά $h(x)=f(x)g(x)=x^2$ <u>δεν</u> είναι lipsch. Πράγματι, αν $\exists\, M>0 : |x^2-y^2|\le M|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow |x+y|\le M$ $\forall\, x\neq y$, άτοπο.

$\boxed{\Theta.5}$

(i) f ο.σ $\Leftrightarrow$ f συνεχής και $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{1}\cdot \ln 1 = 1\cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$, και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \overset{dlH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1/(-2x\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-2)\sqrt{x} = 0 \in \mathbb{R}.$$

Άρα f ο.σ.

(ii) Ισχύει ό,τι στο (i):

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = \lim_{y\to -\infty} e^{y} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} e^{-1/x^2} = e^{-1} = 1/e \in \mathbb{R}.$$

(iii) Εξετάζω την ο.σ. στο $(0,1]$ και στο $[1,+\infty)$:

Για το $(0,1]$ αρκεί να $\exists \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \in \mathbb{R}$. Πράγματι:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \underset{dlH}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-3\cdot \sqrt[3]{x}) = 0. \quad \text{Άρα } g \text{ ο.σ. στο } (0,1].$$

Στο $[1,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} \ln x + \sqrt[3]{x}\cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 3}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Η g' είναι συνεχής με

$$\lim_{x\to +\infty} g'(x) \underset{dlH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{2/3\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3\sqrt[3]{x}}{2x} = 0$$

Άρα g' φραγμένη $\Rightarrow$ g Lipsch. $\Rightarrow$ g ο.σ. στο $[1,+\infty)$.

Επομένως, g ο.σ. στο $(0,1]\cup[1,+\infty) = (0,+\infty)$.

(iv) Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_k = 2k\pi + 1/k$ και $y_k = 2k\pi$.
Τότε $x_k - y_k = 1/k \to 0$, ενώ

$$g(x_k) - g(y_k) = (2k\pi + 1/k)^2 \sin(2k\pi + 1/k) - \underbrace{(2k\pi)^2 \sin 2k\pi}_{=0} =$$

$$= (4k^2\pi^2 + 4\pi + 1/k^2) \sin 1/k =$$

$$= \underbrace{4\pi^2 \cdot k}_{\downarrow +\infty} \cdot \underbrace{\frac{\sin 1/k}{1/k}}_{\downarrow 1} + \underbrace{4\pi \cdot \sin 1/k}_{\downarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\downarrow 0} \to +\infty.$$

Άρα η g δεν είναι ο.σ.

(v) Η g ορίζεται σε διάστημα, είναι παραγωγίσιμη με

$$|g'(x)| = \left|2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot (-1/x^2)\right| =$$

$$= \left|2\frac{\sin 1/x}{1/x} - \cos 1/x\right| \leq \left|2\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right| + |\cos 1/x|$$

$$\leq 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

δηλ. η g έχει φραγμ. παράγωγο $\Rightarrow$ g lipsch. $\Rightarrow$
$\Rightarrow g$ ο.σ.

<u>Παρατηρήσεις!</u>

(1) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \not\Rightarrow g$ όχι ο.σ.

(2) $\sqrt{x} < x$ <u>δεν</u> ισχύει!!

(3) $-|x-y|^{1/2} \leq f(x) - f(y) \leq |x-y|^{1/2} \not\Rightarrow f$ παραγωγίσιμη

(4) $a_n \leq \underset{\downarrow \beta \in \mathbb{R} \text{ ή } +\infty}{\beta_n} \not\Rightarrow a_n$: ομοίως

(5) Αν $|f^2(x) - f^2(y)| < 2M\varepsilon$ <u>δεν</u> μπορώ να πω:
<u>παίρνω</u> $\varepsilon' = 2M\varepsilon$